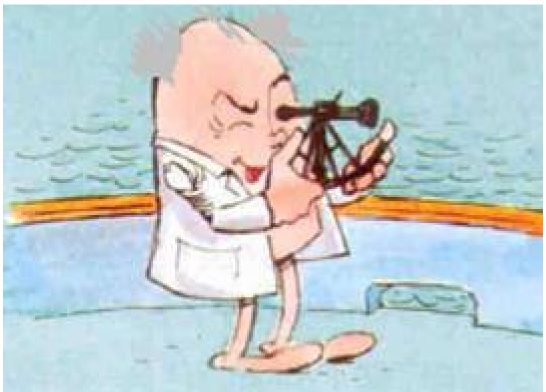
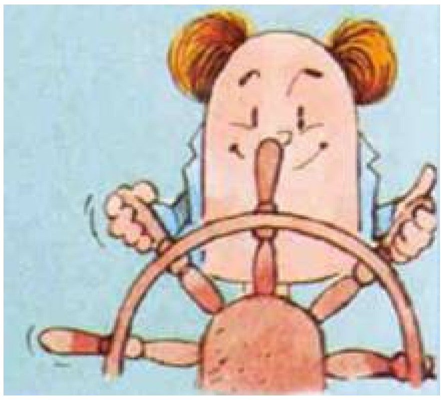
Le sextant
et la navigation astronomique

Frédéric Élie, mai 2006, septembre 2010

Le sextant sert à mesurer la hauteur angulaire d'un astre au-dessus de l'horizon afin de déterminer la latitude du lieu. Malgré les techniques modernes de positionnement (GPS, Galileo...), cet instrument sert encore au navigateur, notamment pour la technique de la « droite de hauteur ».

Utilité du sextant

Parmi les techniques de navigation astronomique figure celle de la droite de hauteur qui permet de déterminer un lieu de position du navire. Pour cette technique il est nécessaire d'employer un instrument de visée qui fournit la hauteur d'un astre au-dessus de l'horizon : le sextant. Cette technique est entachée d'erreur puisqu'elle consiste à déterminer l'angle fait entre la direction d'un astre et l'horizon pour un observateur supposé situé au centre de la Terre. Or l'observateur n'est pas situé au centre de la Terre, mais à sa surface, et la lumière issue de l'astre qui lui parvient suit un trajet perturbé par les effets de réfraction atmosphérique. En outre des erreurs instrumentales influencent les valeurs lues de l'angle, et il est alors nécessaire d'effectuer des corrections de hauteur.

Le sextant sert aussi à mesurer la hauteur d'un phare ou d'un amer au-dessus de la surface de la mer (cf. article « **phare de Contis** »).

La désignation de sextant signifie que l'arc, appelé limbe, de l'appareil était initialement la sixième partie angulaire d'un cercle complet, soit 360°/6 = 60°. Aujourd'hui le limbe représente un secteur angulaire de 70° environ, mais gradué de 0 à 140°. L'ancêtre du sextant est l'octant, inventé par l'anglais **John Hadley** en 1731. La structure du sextant actuel remonte à 1758.

On verra plus loin le principe de positionnement par la droite de hauteur. Voyons dès à présent la constitution d'un sextant et son utilisation.

Description et utilisation du sextant

Un sextant est constitué des parties suivantes (voir **figure 1** et **photo 1**):

- le ***limbe*** : secteur angulaire de 70°, gradué par pas de 1°, de 0 à 140° (c'est-à-dire le double du secteur angulaire, on verra pourquoi après).
- L'***alidade*** : tige mobile coulissant sur le limbe et dont l'axe de rotation coïncide avec la sommet du secteur angulaire du limbe. L'alidade se déplace grâce à un tambour à crémaillère gradué de 0 à 60 minutes d'angle.
- Un ***grand miroir*** solidaire à l'alidade donc se déplaçant avec lui.
- Un ***petit miroir***, solidaire du support du limbe (photo 2). Par construction, le petit miroir est parallèle au grand miroir lorsque l'alidade est à zéro degré sur le limbe (photo 3). Le petit miroir comprend une partie transparente qui permet de repérer l'horizon, et une partie réfléchissante qui reçoit l'image de l'astre renvoyée par le grand miroir lorsque celui-ci est positionné correctement par l'alidade.
- Une ***lunette de visée*** dont l'axe passe par le centre du petit miroir. Elle permet au navigateur de voir à la fois l'horizon et l'astre réfléchi par le grand miroir sur le petit miroir.
- Deux groupes de ***verres colorés***, l'un associé au petit miroir, l'autre associé au grand miroir : leur rôle est d'atténuer la luminosité du soleil.

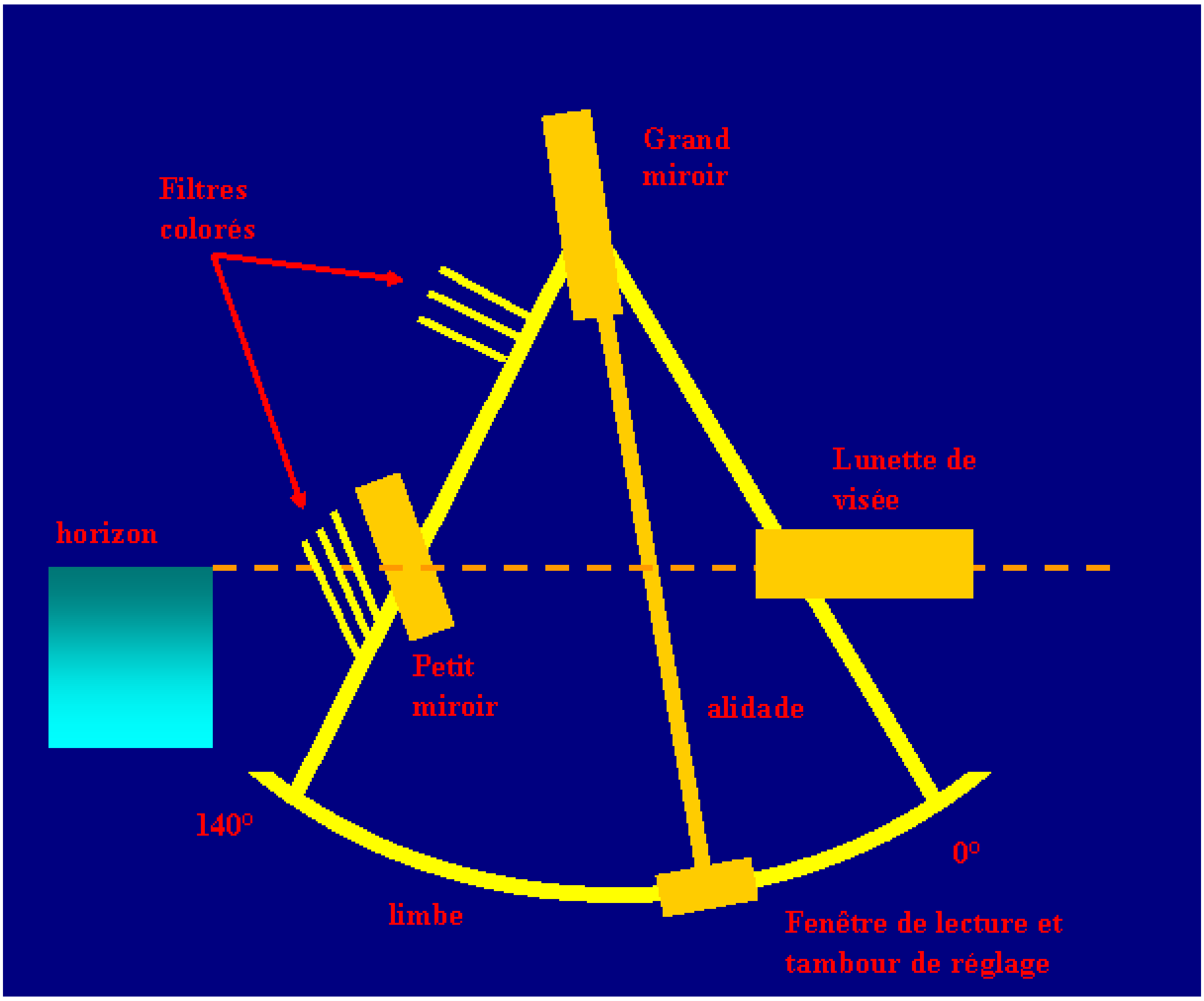


figure 1 : schéma d'un sextant

photo 1 : sextant
(photo : F. Elie)

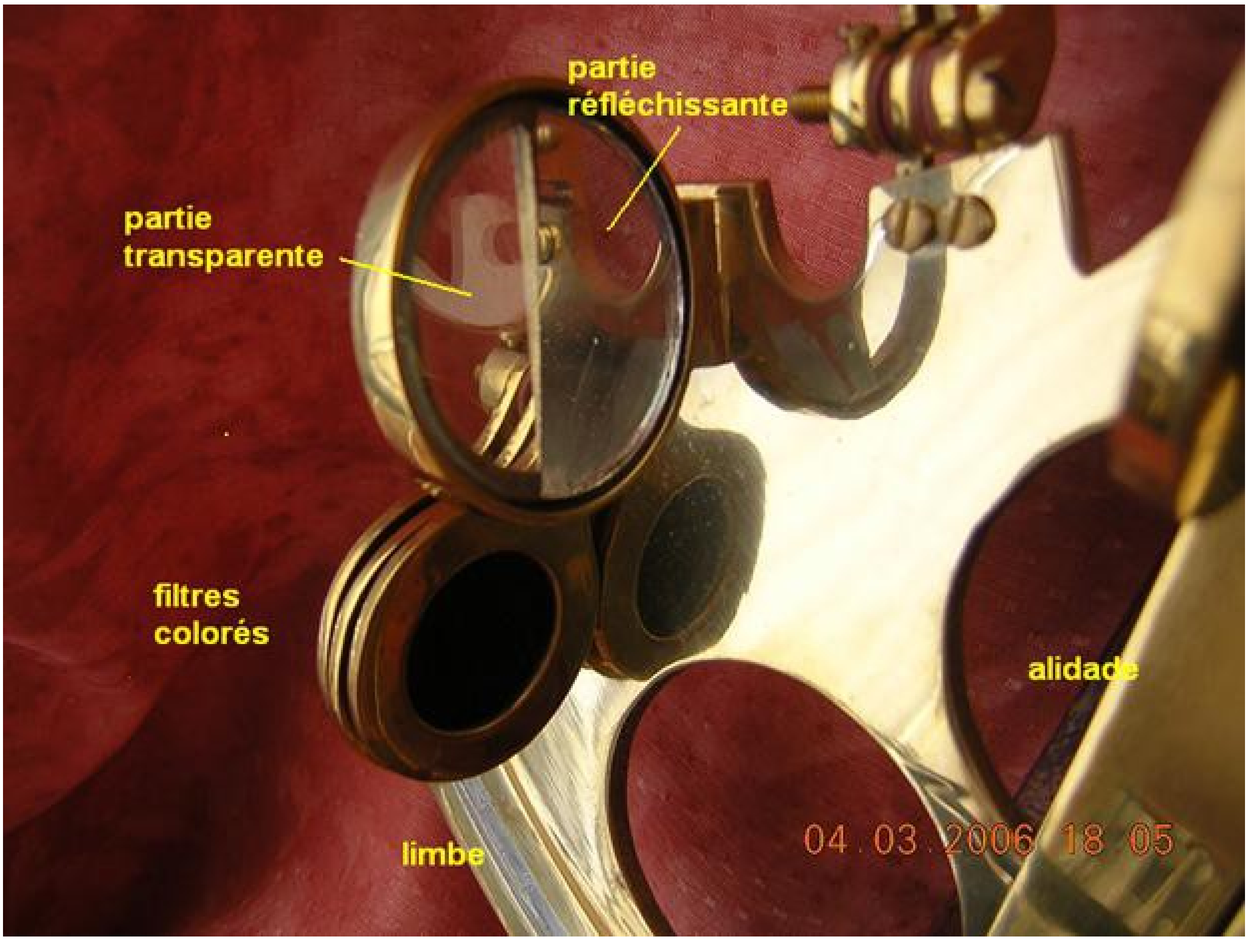


photo 2 : petit miroir (F. Elie)

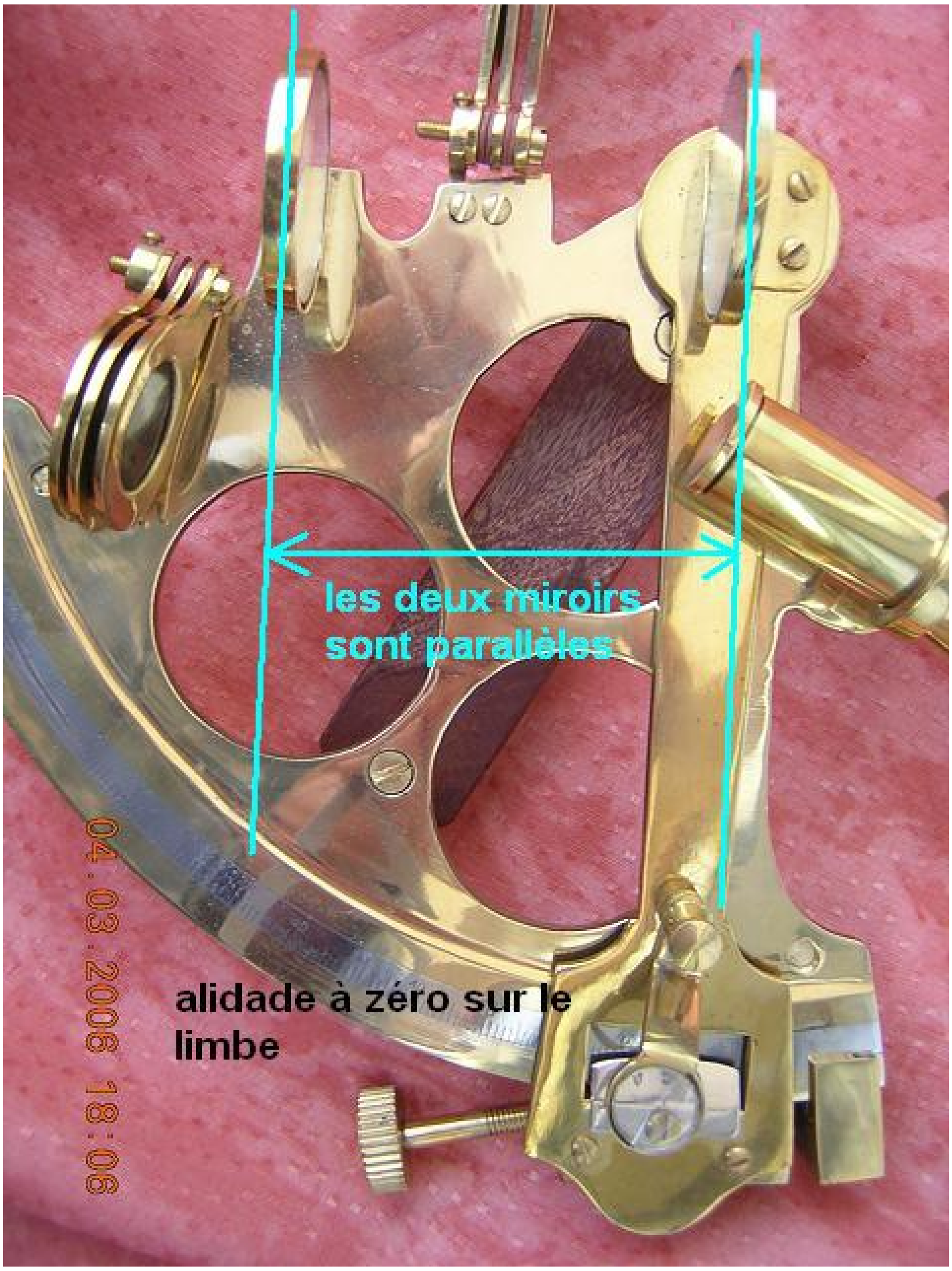


photo 3 : parallélisme des miroirs pour alidade à zéro (F. Elie)

Le ***principe du sextant*** est très simple :

Pour mesurer la hauteur angulaire h d'un astre au-dessus de l'horizon, on positionne l'alidade de manière à ce que l'image de l'astre se reflète dans le petit miroir au même niveau que la ligne d'horizon que l'on peut voir à travers sa surface transparente (voir **figure 2**). On lit alors cette hauteur h directement sur la graduation du limbe par la fenêtre de lecture qu'on ajuste au moyen du tambour.

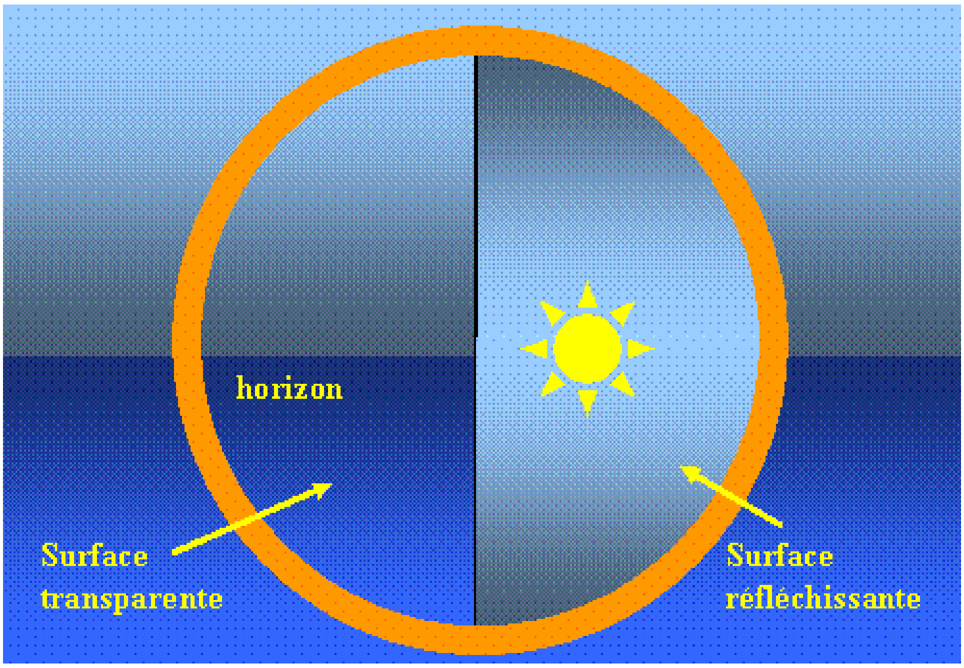


figure 2 : relevé de hauteur dans le petit miroir
on déplace l'alidade jusqu'à faire coincider l'image reflétée de l'astre avec l'horizon

Ce procédé repose sur deux résultats bien connus de l'optique géométrique :

- selon les lois de **Descartes-Snell**, l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence du rayon lumineux sur un miroir : r = i. Il s'ensuit que, si le grand miroir est parallèle au petit miroir alors le rayon incident qui arrive sur le grand miroir est parallèle au rayon réfléchi par le petit miroir (**figure 3**). S'il est aligné avec l'axe de la lunette de visée, on verra alors par celle-ci l'image réfléchie et l'image directe au même niveau sur les deux surfaces transparente et réfléchissante du petit miroir (**figure 2** ci-dessus). La position de l'alidade correspondante sera repérée par zéro sur le limbe.

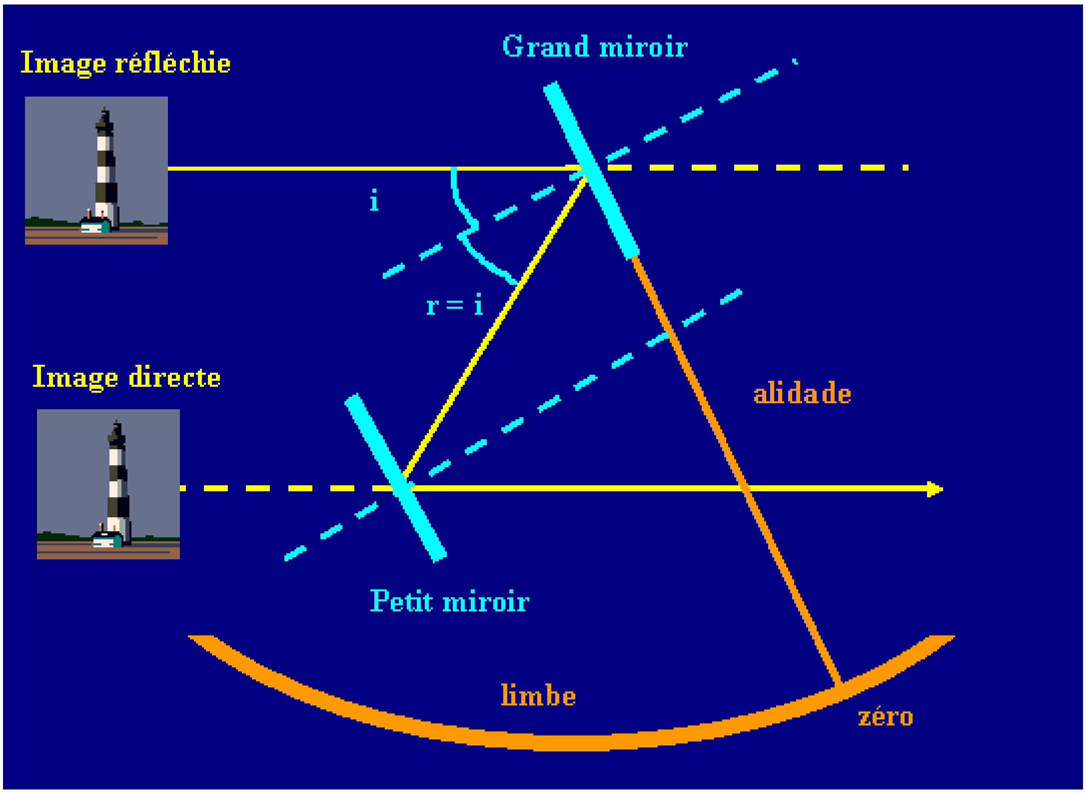


figure 3 : zéro de l'alidade

- lorsqu'un miroir, qui reçoit un rayon lumineux sous incidence i, tourne d'un angle a, l'angle du rayon réfléchi n'est plus r = i mais r = i + 2a, autrement dit le rayon réfléchi a tourné de 2a (2 fois l'angle de rotation du miroir). La démonstration est immédiate (exercice !). Appliquée au déplacement de l'alidade du sextant, cette propriété entraîne que si l'horizon et l'image réfléchie de l'astre sont vus confondus dans la lunette de visée, alors le grand miroir a tourné d'un angle h alors que le rayon incident a tourné de l'angle 2h, où h est la hauteur angulaire de l'astre au-dessus de l'horizon. Il revient au même de dire que la hauteur angulaire de l'astre au-dessus de l'horizon est égale au double de l'angle de rotation de l'alidade le long du limbe. Ceci explique pourquoi le limbe est gradué suivant une échelle 1/2. (**figure 4**).

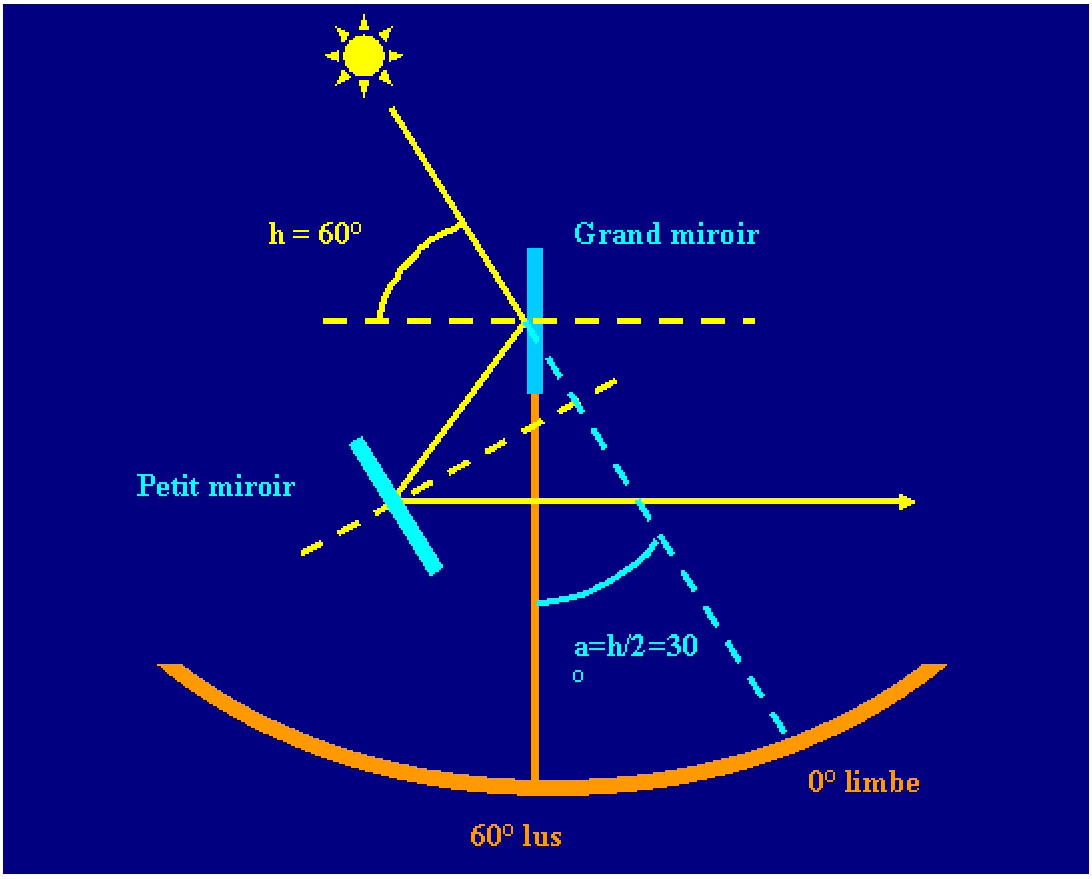


figure 4 : principe de la graduation du limbe

La lecture de la hauteur de l'astre se fait alors directement dans la fenêtre de lecture coulissant sur le limbe à l'aide du tambour. En général cette fenêtre est située à gauche du zéro de l'alidade sur le limbe (« ***lecture à gauche*** ») (**photo 4**).


photo 4 (F. Elie) : fenêtre de lecture et sa vis de réglage

Erreurs et corrections du sextant

La hauteur qui intervient dans la méthode de la droite de hauteur est la hauteur vraie de l'astre Hv. Elle n'est pas égale à la hauteur observée Ho par le navigateur à la surface de la Terre au moyen du sextant. En fait, la hauteur vraie Hv n'est pas directement mesurable. Voici les définitions de ces hauteurs :

- ***Hauteur vraie*** Hv d'un astre : c'est l'angle que fait avec l'horizon vrai la ligne OA joignant le centre de la Terre O au centre de l'astre A (voir **figure 5**).
- ***Horizon vrai*** : c'est le plan passant par le centre de la Terre O et perpendiculaire à la verticale géométrique de l'observateur (Oz) ; la verticale est qualifiée de géométrique pour la distinguer de la verticale gravimétrique définie par la direction de la pesanteur, et en supposant la Terre sphérique.
- ***Hauteur apparente*** Ha d'un astre : c'est l'angle que fait avec l'horizon apparent la ligne MA joignant l'observateur M au centre de l'astre A (**figure 5**).
- ***Horizon apparent*** : c'est le plan parallèle à l'horizon vrai et passant par les yeux de l'observateur M.
- ***Hauteur observée*** Ho d'un astre : c'est l'angle que fait avec l'horizon visuel la ligne MA joignant l'observateur M au centre de l'astre A (**figure 5**).
- ***Horizon visuel*** : c'est le plan tangent en T à la surface de la Terre et passant par les yeux de l'observateur M. Il dépend de la hauteur h de l'observateur M au-dessus de la surface de la Terre supposée sphérique. On a montré, dans l'article « **phare de Contis** », que la distance de l'horizon visuel D = MT est reliée à l'altitude h par la formule :

$$D(\text{milles}) = 2{,}1\sqrt{h(\text{m})}$$

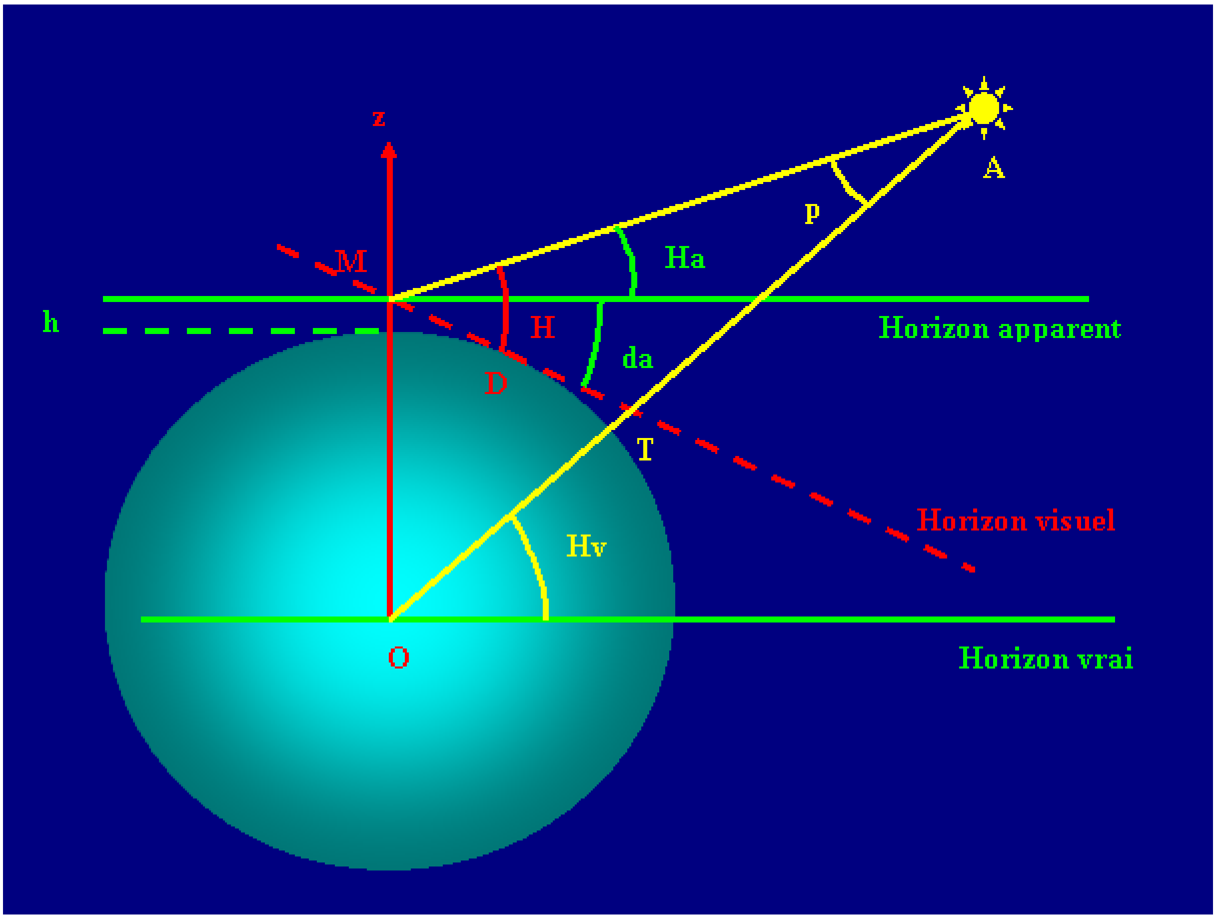


figure 5 : définition des horizons et des hauteurs

Pour des astres situés à une distance très grande devant les dimensions de la Terre, la hauteur vraie Hv et la hauteur apparente Ha peuvent être confondues (cas des étoiles et des planètes). Dans le cas contraire (Soleil et a fortiori Lune), ces deux hauteurs sont reliées par la parallaxe p : c'est l'angle MAO (cf **figure 5**), maximal lorsque l'astre est à l'horizon apparent (OMA = 90°). On montre en effet très facilement, dans le triangle (OMA) que (exercice !) :

$$Hv = Ha + p$$

On appelle ***parallaxe horizontale*** de l'astre, notée π, l'angle sous lequel est vu le rayon de la Terre R depuis le centre de l'astre A. On a donc, pour un astre situé à la distance r du centre de la Terre :

$$\pi = \frac{R}{r}$$

On montre facilement qu'elle est reliée à la parallaxe p selon :

$$p = \pi \cos Ha$$

la parallaxe p est donc maximale et égale à la parallaxe horizontale π lorsque l'astre est à l'horizon apparent (Ha = 0) : p = π.
La parallaxe horizontale est une donnée qui dépend de la distance de l'astre à la Terre variant au cours des années, elle est fournie par les ***Ephémérides Nautiques*** :

Soleil	Parallaxe horizontale varie entre 0',14 et 0',15
Lune	Parallaxe horizontale varie entre 0°,86 et 1°,03
planètes	Parallaxe horizontale varie entre 0',1 et 0',3 pour Mars et Vénus, elle est négligeable pour les autres planètes

La hauteur apparente Ha diffère de la hauteur observée Ho d'un écart appelé « ***dépression apparente de l'horizon*** », da, (voir **figure 5**) :

$$Ho = Ha + da$$

la dépression apparente de l'horizon dépend géométriquement de l'altitude h de l'observateur, et optiquement des effets de réfraction des trajets lumineux en provenance de l'horizon visuel due à l'atmosphère terrestre :

$$da = 1{,}93 \cdot (1-\gamma)\sqrt{h}$$

où da est en minutes d'arc, h en mètres, γ coefficient de réfraction dépendant de la pression atmosphérique, de la température, et de l'humidité, variant de 0,04 par temps sec à 0,16 par temps humide (donné par les Ephémérides Nautiques).
La hauteur apparente de l'astre est modifiée par les effets de réfraction atmosphérique des rayons lumineux en provenance de l'astre. A cause d'elle, ce n'est pas Ha qui est obtenue avec le sextant mais la « ***hauteur apparente réfractée*** » Har. Pour obtenir la hauteur apparente Ha à partir de Har, il faut corriger celle-ci de l'angle de réfraction astronomique, R, qui est l'angle entre la direction géométrique de l'astre MA et la direction apparente MA', tangente en M au trajet lumineux réfracté (**figure 6**) :

$$Ha = Har - R$$

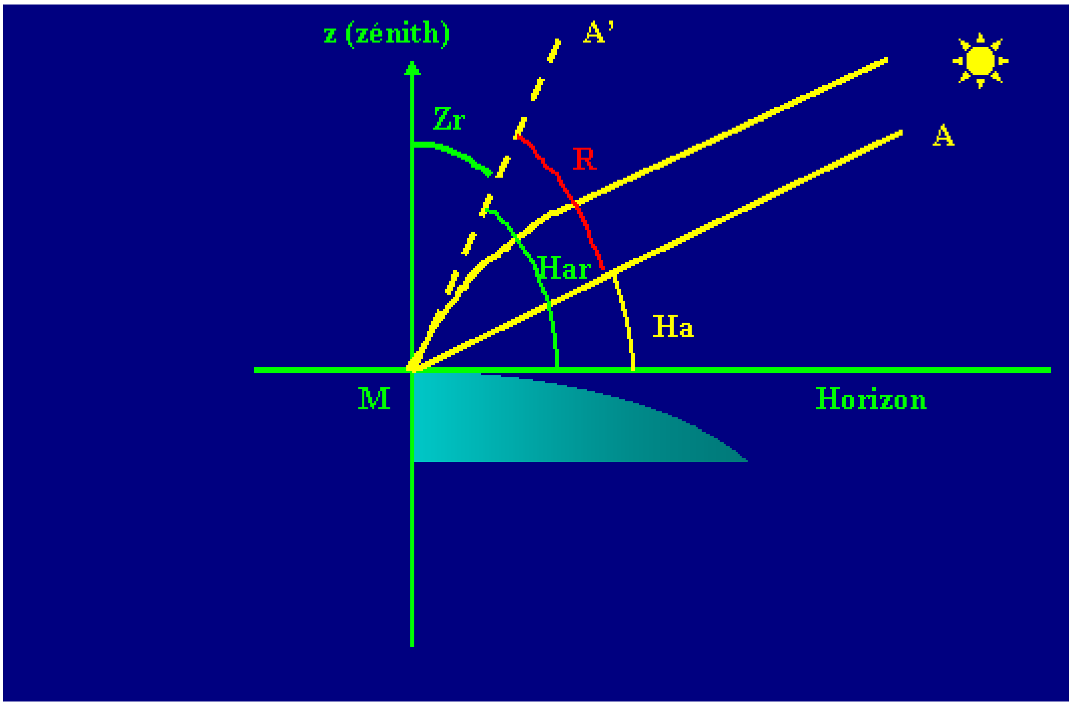


figure 6 : réfraction astronomique

Si Zr est la distance zénithale apparente de l'astre (distance zénithale réfractée), on montre que la réfraction astronomique est donnée, dans les conditions normales de température

(10°C) et de pression (760 mm Hg) par :

$$R = 58'',3 \tan Zr - 0'',067 \tan^3 Zr$$

R étant donnée en secondes d'arc. Cette formule est applicable pour des distances zénithales comprises entre 0° et 75°. De manière plus générale, R se décompose en trois termes :

$$R = Rm + aRm + bRm$$

où Rm est donné dans les conditions standard, aRm est le terme dépendant de la température, bRm est le terme de dépendance en pression. Tous ces termes sont donnés par les Ephémérides Nautiques.

Compte tenu des relations précédentes, on peut déduire la hauteur vraie Hv à partir de la hauteur observée Ho. En effet, nous avons successivement :

- Ho = Har + da
- Ha = Har – R
- Hv = Ha + p = (Har – R) + p = (Ho – da) – R + p, soit :

$$Hv = Ho + p - da - R$$

Or, d'une part, Hv doit être corrigée du terme de « demi-diamètre », et d'autre part, Ho n'est pas l'angle réellement lu sur le limbe. L'angle lu sur le limbe, appelé hauteur instrumentale Hi, diffère de la hauteur observée d'un terme correctif ε qui regroupe les erreurs d'excentricité et de collimation du sextant :

$$Ho = Hi + \varepsilon$$

Explicitons ces corrections :

- Pour des astres non ponctuels, comme le soleil ou la lune, il est rare de pouvoir faire coïncider exactement l'image de leur centre A avec l'horizon. En général c'est avec le bord inférieur ou supérieur du disque de l'astre que l'on réalise cette coïncidence. Il s'introduit donc sur Ha, donc sur Hv, une erreur angulaire égale en valeur absolue au demi-diamètre angulaire de l'astre : $\pm$ D/2, D étant le diamètre angulaire de l'astre (D/2 = 16' en moyenne pour le soleil, 14',7 à 16',7 en moyenne pour la Lune). Ces diamètres apparents sont donnés par les pages journalières des Ephémérides. On aura donc Hv = Hv' $\pm$ D/2, où Hv' est la hauteur vraie obtenue en faisant coïncider le bord et non le centre de l'astre avec l'horizon, le signe est « + » si c'est le bord inférieur, « - » si c'est le bord supérieur.

- L'erreur instrumentale ε a deux origines : l'excentricité e et la collimation C : ε = e + C

- ***Erreur de collimation*** C : lorsque l'on fait coïncider un objet ponctuel (étoile) avec son image doublement réfléchie dans le petit miroir, la théorie montre, comme on l'a vu, que les deux miroirs sont parallèles et l'alidade à zéro sur le limbe. En réalité l'alidade n'est pas à zéro mais à une valeur dite « ***lecture à droite*** » si le repère de l'alidade est situé à droite du zéro du limbe, ou « lecture à gauche » si le repère de l'alidade est situé à gauche du zéro du limbe. Pour déterminer C, on utilise, à l'aide des filtres colorés, l'alignement de l'image directe et de l'image réfléchie du soleil, en faisant en sorte de faire tangenter le disque solaire réfléchi avec le disque réel par le haut (lecture à droite) puis par le bas (***lecture à gauche***) (**figure 7**). On obtient alors :

Lecture à droite = D + C
Lecture à gauche = D – C
D'où : C = (lecture à droite – lecture à gauche)/2

D étant le diamètre angulaire du soleil.

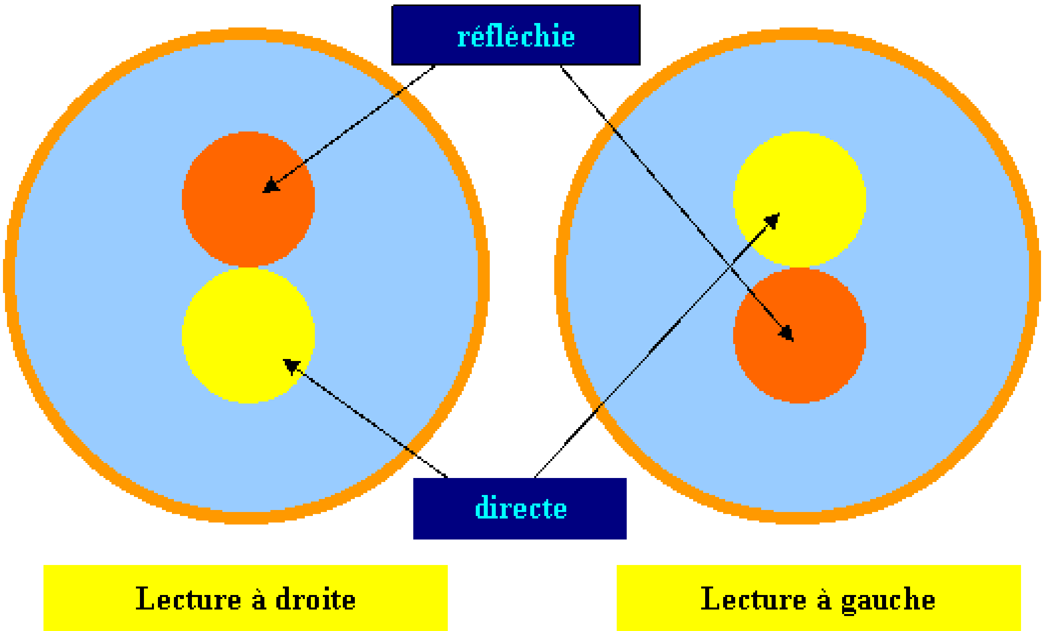


figure 7 : détermination de la collimation C

- ***L'erreur d'excentricité*** trouve son origine dans le calage imparfait du centre de rotation de l'alidade : celui-ci ne coïncide pas avec le centre géométrique du limbe, dont le rayon est r, mais en diffère d'une distance s et d'un angle α par rapport au zéro du limbe (**figure 8**). On démontre alors que l'erreur angulaire « e » de la mesure de l'angle sur le limbe, ou erreur d'excentricité, exprimée en minutes d'arc, est donnée par :

$$e(') = 3438 \frac{s}{r} \sin(Hi - \alpha)$$

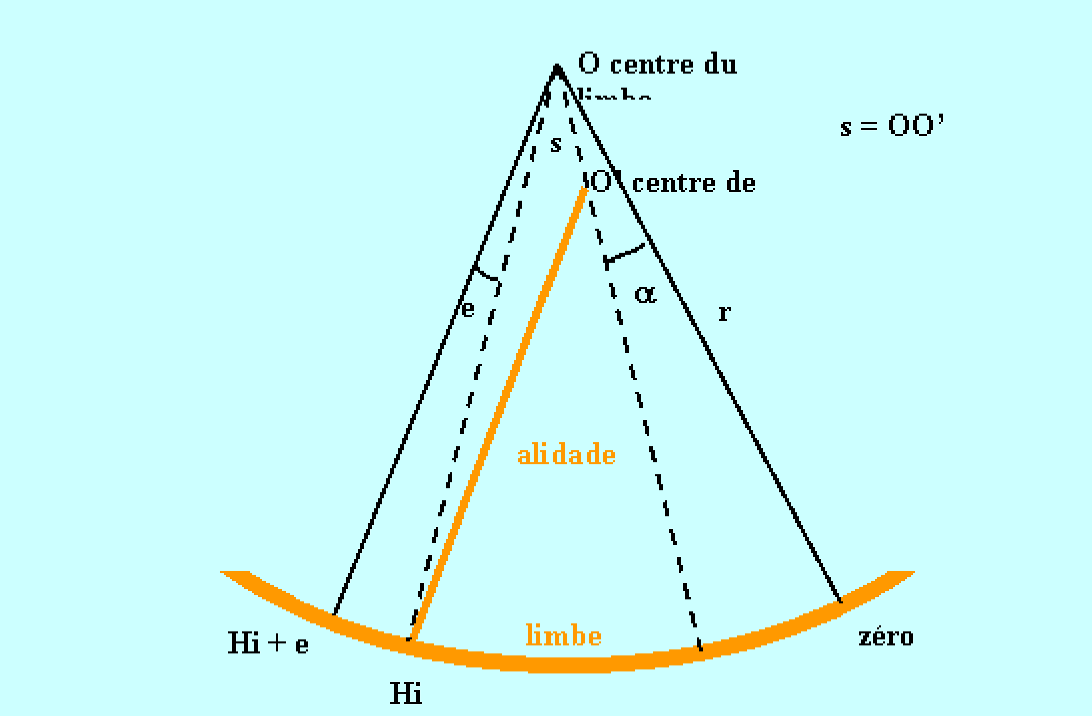


figure 8 : erreur d'excentricité

En définitive, la hauteur vraie Hv déduite de la hauteur instrumentale Hi est donnée par :

$$Hv = Ho + p \pm D/2 - da - R$$
$$Ho = Hi + \varepsilon = Hi + e + C$$

Remarque : balancement du sextant. Pour que la hauteur d'un astre A à l'horizon soit exploitable il faut que le plan contenant le limbe, l'alidade et le centre du limbe O soit parfaitement vertical. Or la difficulté est que, sur l'horizon, on ne distingue le point d'intersection avec l'horizon de la perpendiculaire menée de A. Rien n'indique alors la verticalité du sextant. Si le plan du limbe est incliné d'un petit angle A sur la verticale, on démontre que l'erreur sur la hauteur ΔH 'en minutes d'arc) est reliée à la valeur lue sur le limbe Hi par :

$$\Delta H(') = 3438 \frac{A^2}{4} \sin 2Hi$$

où A est exprimée en radian (voir démonstration en **annexe**).

Pour s'affranchir de l'incertitude sur la verticalité du plan du limbe on procède au « ***balancement du sextant*** » (**figure 9**):

- avec le sextant approximativement à la verticale, on vise un point A' sur l'horizon pas trop éloigné de l'astre A.
- on manœuvre ensuite l'alidade de façon à faire coïncider l'image réfléchie de A avec l'image directe A'.
- on fait tourner le sextant autour de l'axe MA reliant A aux yeux de l'observateur M : c'est le balancement. Au cours de cette rotation, l'axe OA' reliant M à A' sur l'horizon décrit sur la sphère céleste un arc de cercle A'A'' de centre A et de rayon angulaire AA'.
- Si A', qui est sur l'horizon, était à la verticale de A, l'arc A'A'' tangenterait l'horizon en A' et dans ce cas, l'angle indiqué sur le limbe serait la hauteur instrumentale de A.
- Donc en modifiant l'inclinaison du sextant jusqu'à ce que cette tangence soit

obtenue, on réalise la verticalité du sextant.

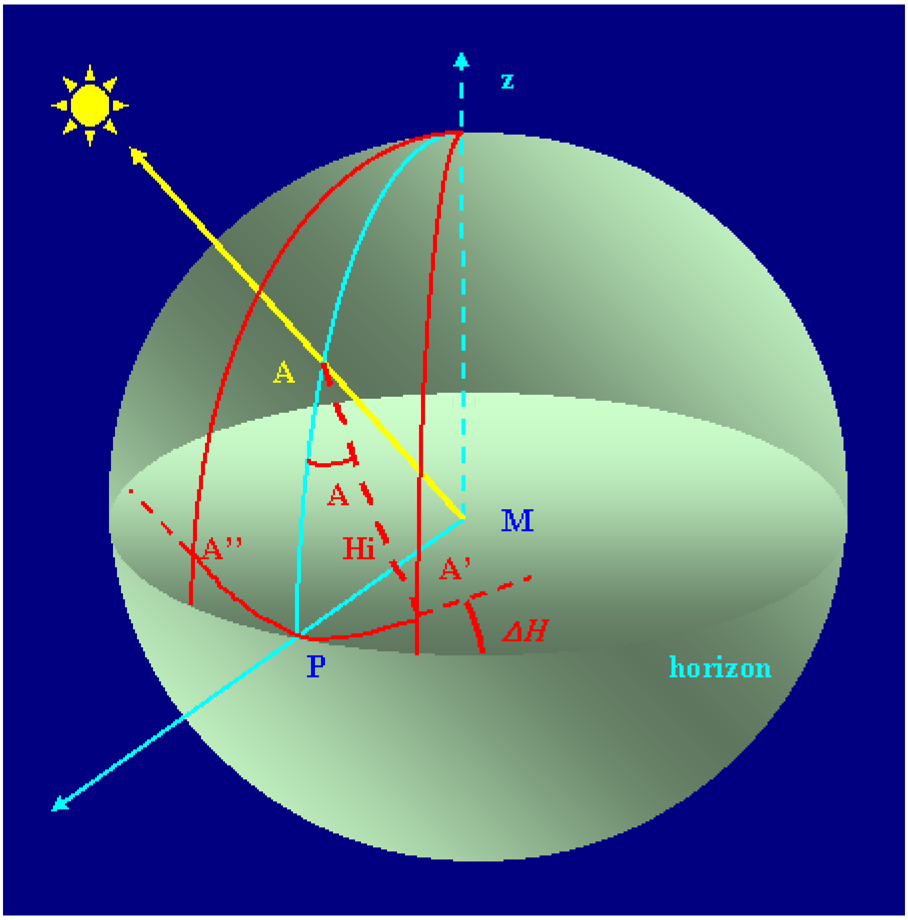


figure 9 : balancement du sextant

La droite de hauteur

Position du problème :

La navigation consiste à diriger le navire suivant une route choisie pour se rendre d'un lieu à un autre. Pour contrôler sa route, à tous moments, le navigateur doit connaître sa position. Celle-ci est donnée par les coordonnées géocentriques à la surface de la Terre :

- la ***latitude*** φ, comptée positivement de 0° à 90° à l'hémisphère nord, et négativement de 0° à -90° à l'hémisphère sud.
- La ***longitude*** L, dont l'origine est le méridien de Greenwich, comptée positivement vers l'ouest de 0° à 360°, et négativement vers l'est de 0° à -360°

Pour un navigateur situé au point M à la surface terrestre, repéré par (φ, L), les astres sont repérés sur la sphère céleste par leurs coordonnées horaires :

- la ***déclinaison*** δ, comptée à partir de l'équateur céleste (qui est contenu dans le même plan de l'équateur terrestre) de 0° à ±90°
- ***l'angle horaire*** AH, comptée à partir du méridien du lieu M le long de l'équateur céleste, positivement vers l'ouest et négativement vers l'est, de 0° à ±360°. Si l'on mesure l'angle horaire à partir du méridien d'origine de Greenwich G sur la sphère céleste on obtient l'angle horaire de A compté depuis le méridien G noté AHag. Les deux angles horaires sont donc reliés par :

$$AHag - AH = L$$

Si O est le centre de la Terre, la direction OA de l'astre coupe la surface de la Terre en A', appelé « ***point substellaire*** » de l'astre A : ses coordonnées à la surface de la Terre sont la latitude φA et la longitude LA égales à tout moment aux coordonnées horaires de l'astre sur la sphère céleste (voir **figure 10**):

$$\varphi A = \delta$$
$$LA = AHag$$

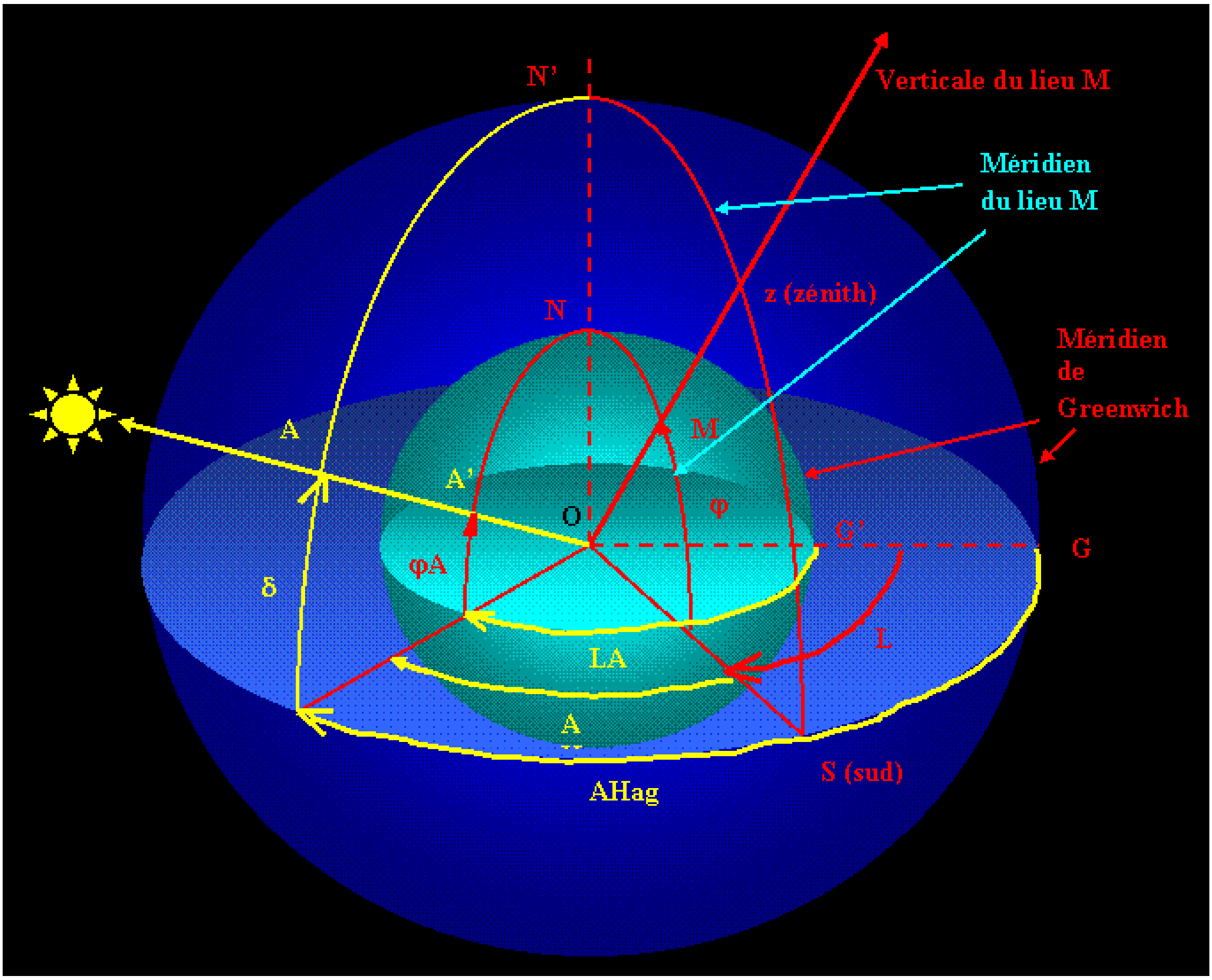


figure 10 : position relative de l'observateur et d'un astre

Venons-en maintenant à la problématique du point.
Il existe une relation entre la hauteur vraie de l'astre A mesurée par l'observateur situé en M et les coordonnées de ce point M. Cette relation justifie que pour faire le point on procède à la mesure de la hauteur vraie Hv de l'astre au moyen, par exemple, du sextant.
En effet l'équation fondamentale établissant cette relation est :

$$\sin Hv = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos(AHap - L)$$

On ne démontrera pas ici cette équation : voir par exemple l'article « cadrans solaires » pour une démonstration.
Hv est la hauteur vraie déduite de la hauteur observée Ho ou instrumentale Hi fournie par le sextant, comme montré plus haut.
Malheureusement, cette relation montre qu'une même hauteur vraie mesurée Hv d'un même astre A, il correspond non pas un seul point de la surface terrestre mais un ensemble de points : tous les points (φ, L) vérifiant l'équation ci-dessus pour un même astre décrivent un cercle à la surface de la Terre appelé « ***cercle de hauteur*** » de centre A' (point substellaire) :

voir **figure 11**. On montre facilement (exercice !) que le rayon angulaire du cercle de hauteur correspondant à Hv est :

$$Nv = 90° - Hv$$

Notons que ce rayon peut correspondre à des distances importantes à la surface de la Terre. Ainsi, pour Hv = 40°, le rayon angulaire est Nv = 90 – 40 = 50°, soit un rayon sur la Terre, exprimé en milles marins : $r = 6370 \text{ km} \times 50°/180° \times \pi /1{,}852 \text{ km} = 60 \times 50° = 3000$ milles (on rappelle que ***1 mille marin*** = 1852 m = 1' d'arc sur la Terre avec rayon terrestre 6370 km).

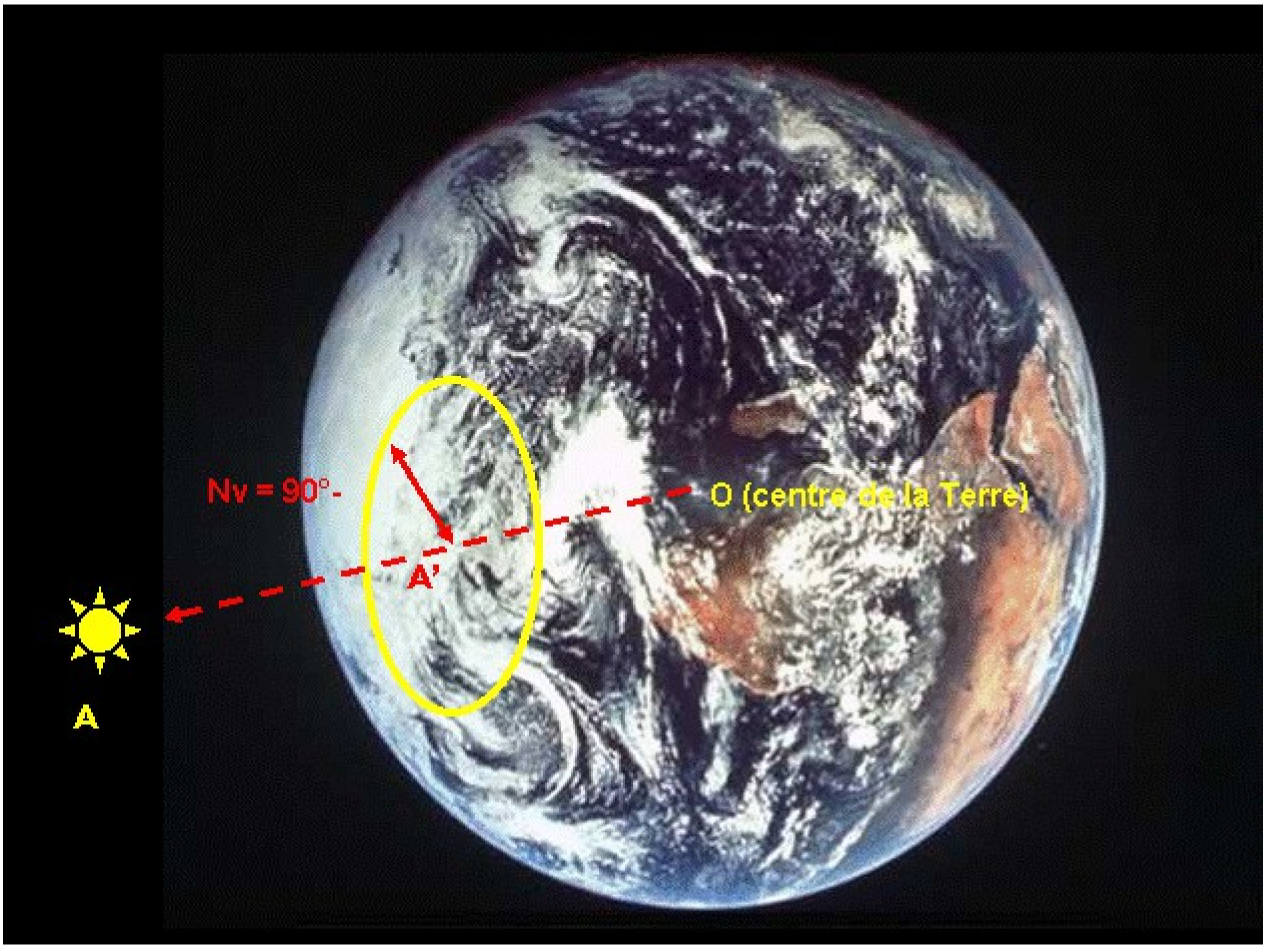


figure 11 : cercle de hauteur

Le problème est alors que, pour déterminer de manière univoque le point, il faut au moins deux relevés de hauteur pour deux astres différents A1 et A2 au même instant. L'observateur se trouvera alors à l'intersection des deux cercles de hauteur correspondants. Or, à moins d'être tangents, deux cercles se coupent en deux points distincts M1 et M2. Il y a donc ambigüité sur la position.
Pour la lever, on pourrait déterminer l'azimut Z de l'astre (angle Z = NMA', c'est-à-dire le relèvement de l'astre par rapport au nord géographique, compté dans le sens des aiguilles d'une montre). Malheureusement cette méthode introduit rapidement des erreurs non négligeables, de l'ordre du degré !
Par ailleurs, la représentation du cercle de hauteur sur la carte marine en projection Mercator n'est pas simple : on n'obtient pas un cercle mais une courbe dite « ***courbe de hauteur*** » (voir ci-dessous).

C'est pourquoi, afin d'une part de simplifier le tracé et, d'autre part, de lever l'ambiguïté entre les deux points d'intersection des cercles de hauteur, on utilise une méthode graphique dite « ***droite de hauteur*** », découverte par le capitaine américain **C. Sumner** en 1837 et mise au point par le contre-amiral français **Marcq de Saint-Hilaire** en 1872.

Son principe est le suivant :

Au voisinage du navire une portion de cercle de hauteur (plus exactement de la courbe de hauteur sur la carte de **Mercator**) peut être assimilée à une droite, que l'on appelle « droite de hauteur ». La position du navire est alors l'un des points de cette droite. Pour trouver la position il suffit donc d'obtenir une deuxième droite de hauteur sur laquelle se trouve aussi le navire : l'intersection des deux droites est alors la position du navire. Pour obtenir un deuxième cercle de hauteur on peut :

- soit mesurer au même endroit M les hauteurs Hv1 et Hv2 de deux astres A1 et A2 : cela fournit deux équations à deux inconnues, ce qui en principe devrait permettre la résolution :

$$\sin Hv1 = \sin\varphi \sin\delta 1 + \cos\varphi \cos\delta 1 \cos(AHag1 - L)$$
$$\sin Hv2 = \sin\varphi \sin\delta 2 + \cos\varphi \cos\delta 2 \cos(AHag2 - L)$$

  La résolution de ce système d'équations, appelé « ***problème de Douwes*** », mais en fait découvert par **Georges Bodenez**, officier de Marine et professeur à l'Ecole Navale, nécessite de connaître un point estimé pour lever les ambigüités sur les solutions obtenues. Une méthode de résolution analytique, proposée par Georges Bodenez, est présentée dans le cours « navigation » de l'Ecole Navale.

- Soit mesurer en M la hauteur Hv d'un astre A et comparer celle-ci avec la hauteur He de ce même astre calculées depuis un point estimé E connu. La différence entre les hauteurs en M et en E donne la distance angulaire entre le point estimé E et la droite de hauteur à laquelle appartient M. Cette distance vaut i = Hv – He, elle s'appelle « l'***intercept*** ». Cela est insuffisant pour déterminer la droite ; pour cela il faut connaître l'azimut Z de l'astre A mesurée au point où la direction point estimé-astre (EA') coupe la droite de hauteur : ce point D est appelé « ***point déterminatif*** ». Or l'azimut peut être calculé dès lors que l'on connaît les coordonnées (φe, Le) du point estimé E ainsi que les coordonnées horaires de l'astre A grâce aux éphémérides à la date de l'observation de Hv par M (c'est pour cela qu'il faut relever l'heure exacte au moment du relevé de la hauteur au sextant).
  La droite de hauteur cherchée est donc la perpendiculaire en D à la direction EA' : D est le point de cette droite le plus proche du point estimé E, c'est pourquoi on appelle aussi cette méthode « ***méthode du point approché*** ».
  Pour déterminer le point M il faut utiliser un deuxième relevé de hauteur, soit du même astre A mais à une heure différente (observation « à long intervalle »), soit d'un deuxième astre au même moment ou à un moment très rapproché (observation dite « crépusculaire », car c'est au crépuscule que l'on peut commencer à observer à la fois l'horizon et plusieurs étoiles). On procède alors aux mêmes calculs avec le même point estimé E qui donnent un deuxième point déterminatif D' définissant une deuxième droite de hauteur à laquelle appartient également le navigateur M. Celui-ci se trouve donc nécessairement à l'intersection des deux droites de hauteur.

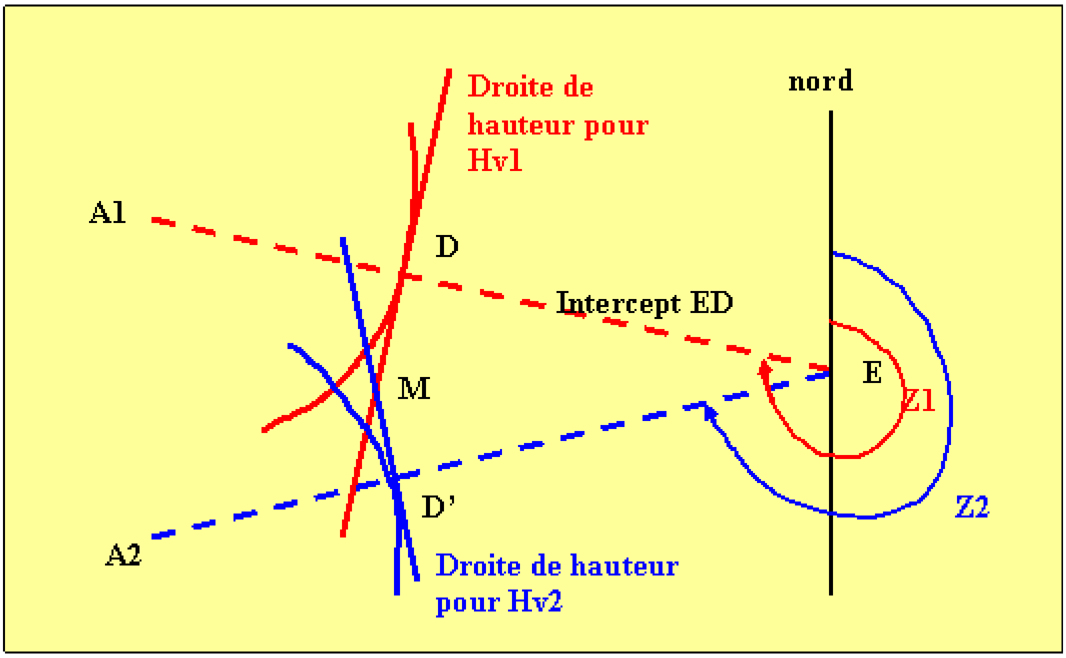


figure 12 : principe général de la méthode de la droite de hauteur

La méthode de la droite de hauteur va maintenant être précisée. Nous avons d'abord besoin de voir les notions relatives à la carte de Mercator.

Projection de Mercator

La projection de Mercator est l'une des façons de représenter sur un plan (carte) une portion de surface sphérique de la Terre. Il s'agit d'une projection cylindrique : un point de la surface terrestre, repéré par (φ, L), est projeté suivant une direction passant par ce point et joignant le centre de la Terre au cylindre tangent à l'équateur (**figure 13**). Les propriétés d'une projection cylindrique sont :

- les méridiens (repérés par la longitude) projetés sur la carte sont régulièrement espacés
- les parallèles (repérées par la latitude) projetées sur la carte sont séparées par un écart qui augmente lorsqu'elles s'éloignent de l'équateur. Les pôles sont rejetés à l'infini.
- De façon générale, la projection cylindrique ne conserve pas les angles. Mais ce qui intéresse le marin c'est de pouvoir prévoir le déplacement de son navire suivant un cap donné, c'est-à-dire suivant l'angle fait entre la direction du navire et les méridiens. Il lui faut donc utiliser une représentation cartographique qui conserve ces angles. C'est ce que fit **Mercator** (de son vrai nom Gerard Kremer, cartographe hollandais qui vécut de 1512 à 1594).

La projection de Mercator répond alors aux deux lois suivantes :

- les méridiens sont représentés par des lignes droites verticales parallèles dont l'espacement est proportionnel à leur différence de longitude. Si la carte marine a pour repère orthogonal Oxy, cette condition revient à écrire :

$$dx = u dL$$

  où u est un facteur d'échelle appelé « unité de la carte », valeur constante.
- Les angles sont conservés, ce qui confère à la projection de Mercator la propriété d'être aussi une projection conforme. Ceci se traduit en écrivant que le rapport entre un segment horizontal et un segment vertical reste le même sur la sphère terrestre et sur la carte de Mercator :

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{Rd\varphi}{R\cos\varphi dL} = \frac{dx}{dy}$$

où ds = Rdφ arc élémentaire lelong d'un méridien, ds' = Rcosφ dL arc élémentaire le long d'un parallèle. En remplaçant dy = udL, cette relation donne :

$$dy = u\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

qui s'intègre en :

$$y = u\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = u\ln\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

soit encore, en exprimant y en millimètres pour une échelle de latitude exprimée en minutes d'arc :

$$y = u\frac{180\times 60}{\pi}\ln\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

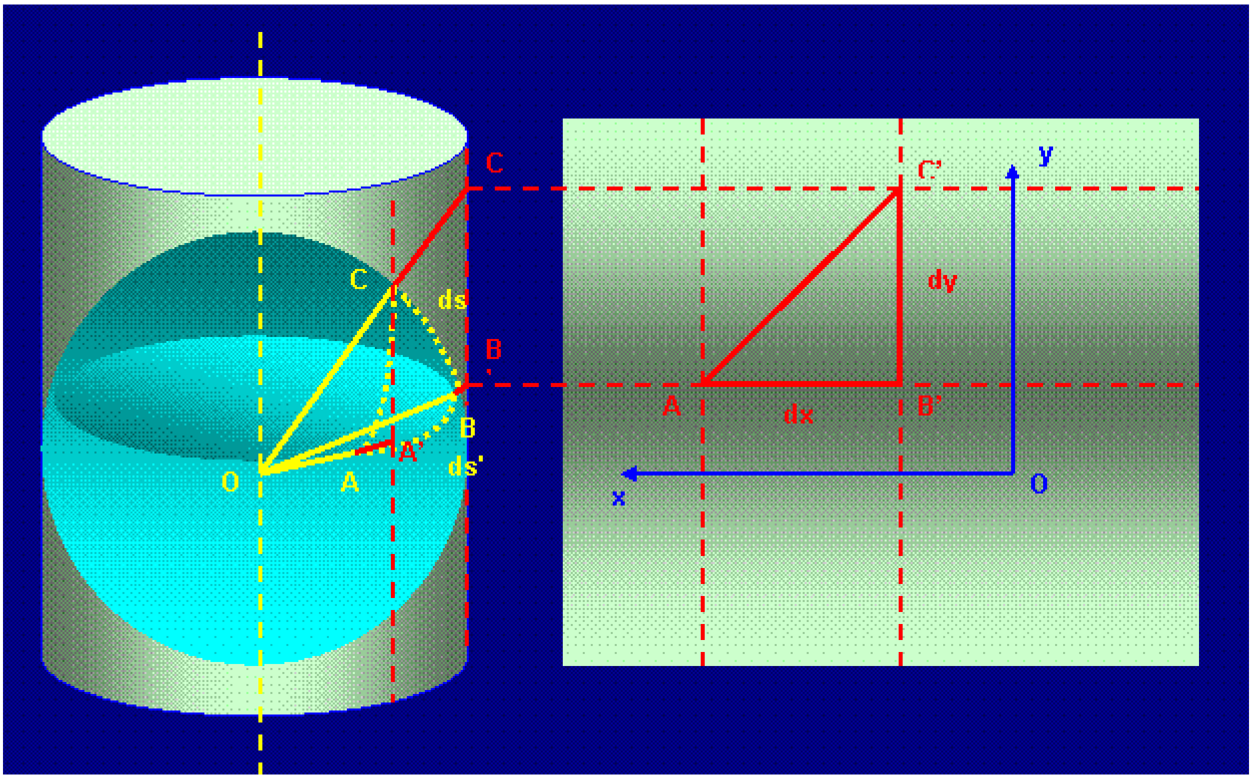


figure 13 : projection cylindrique conforme de Mercator

La représentation d'un cercle de hauteur associé à Hv sur une carte selon la projection de Mercator consiste à transformer les coordonnées (φ, L) vérifiant la relation

$$\sin Hv = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos(AHag - L)$$

en coordonnées (x, y) vérifiant les relations :

$$x = uL$$
$$y = 3438u \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

(le coefficient 3438 est la valeur de 180x60/π puisque les latitudes sont exprimées en minutes d'angle). Suite à l'écartement croissant des parallèles sur la carte de Mercator lorsqu'on s'éloigne de l'équateur, la projection du cercle de hauteur sera une courbe déformée.
La courbe représentant le cercle de hauteur sur la carte en projection Mercator s'appelle courbe de hauteur.
Selon la position du cercle de hauteur par rapport au pôle terrestre N (nord ou sud, de l'hémisphère où se trouve le point substellaire A'), on distingue trois types de courbes de hauteur :

- courbes de première espèce (figure 14) : la hauteur de l'astre est supérieure en valeur absolue à sa déclinaison Hv > |δ|. Le pôle N est donc à l'extérieur du cercle de hauteur.
  La courbe de hauteur est un cercle déformé, allongé dans le sens nord-sud, symétrique par rapport au méridien passant par l'image du point substellaire A', et contenue dans un rectangle dont les côtés parallèles sont (φA ± Nv) et les côtés méridiens sont (LA ± L0) où :

$$L0 = \frac{\sin Nv}{\cos\delta}$$

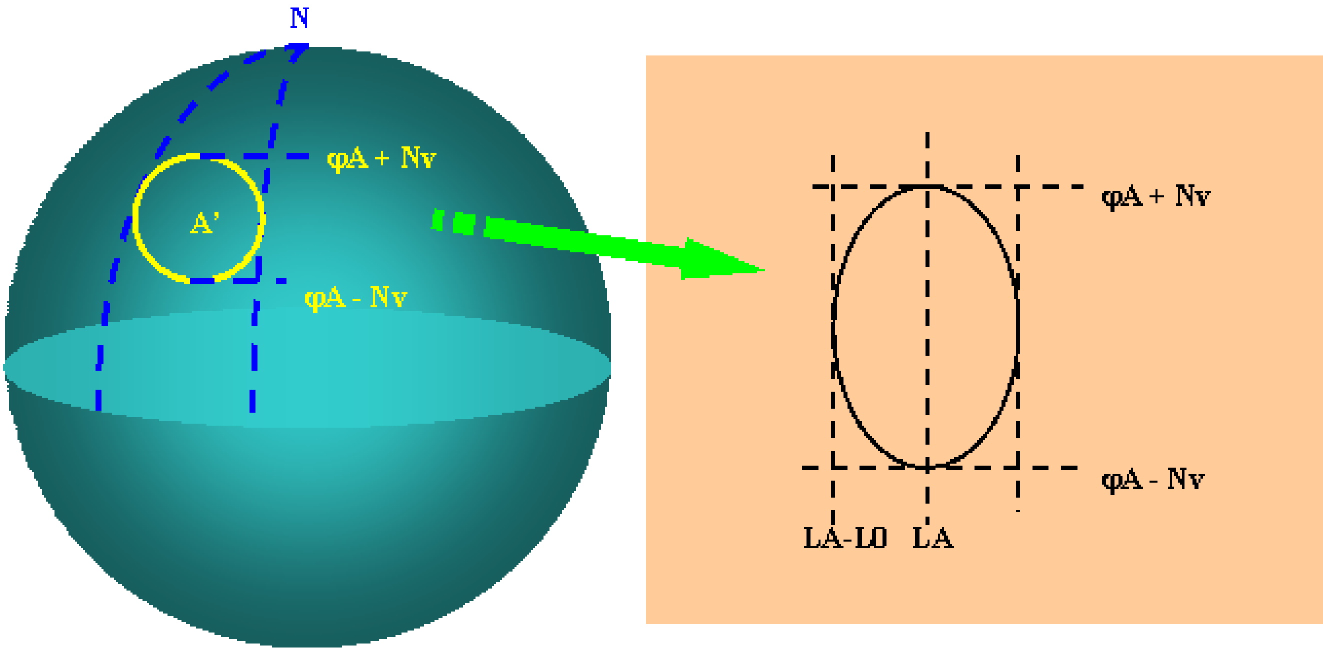


figure 14 : courbe de hauteur de première espèce

- courbes de deuxième espèce (figure 15) : le cercle de hauteur est tel que Hv < |δ|, donc le cercle de hauteur entoure le pôle N de l'hémisphère où se trouve le point substellaire A'. La courbe de hauteur ressemble à une sinusoïde comprise entre le parallèle au sud (φA – Nv) et au nord (180°- (φA + Nv)), et qui parcourt toutes les longitudes.

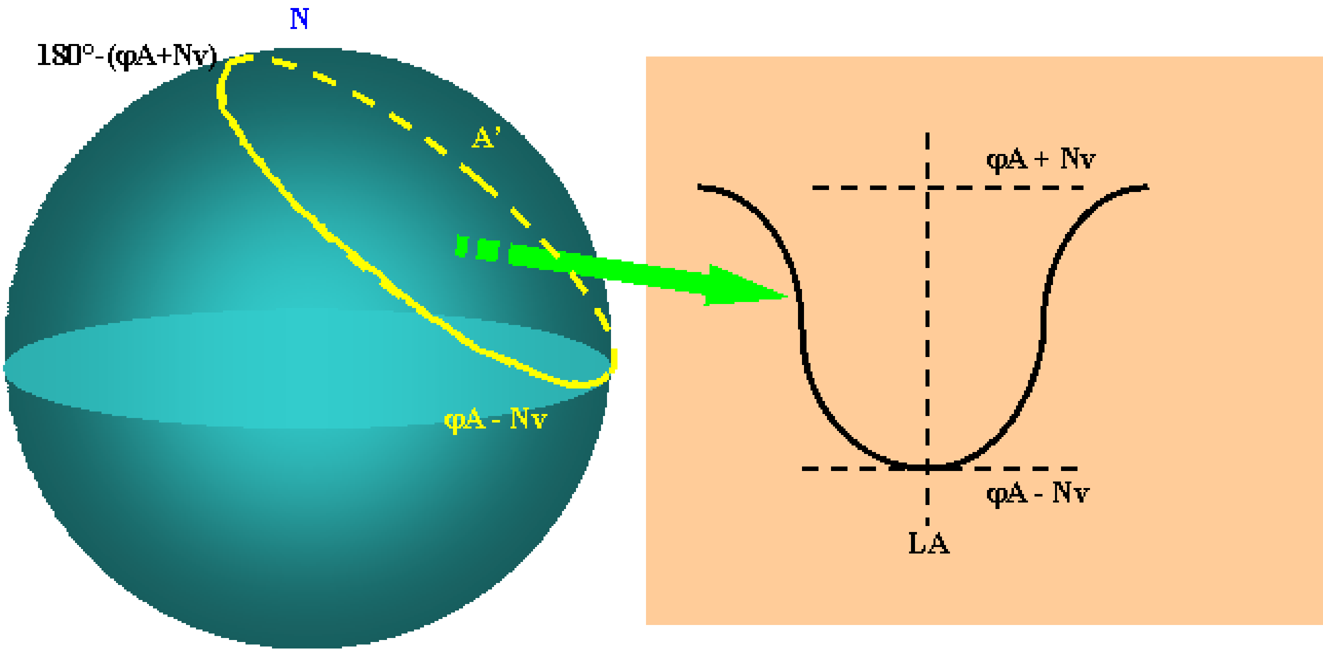


figure 15 : courbe de hauteur de deuxième espèce

- courbes de hauteur de troisième espèce (figure 16) : la hauteur de l'astre est égale à sa déclinaison Hv = |δ|, donc le cercle de hauteur passe par le pôle N de l'hémisphère du point substellaire. Puisque les pôles sont rejetés à l'infini dans une projection de Mercator, la courbe de hauteur a deux asymptotes suivant les méridiens (LA ± 90°). Elle est symétrique par rapport au méridien passant par le point substellaire A' (longitude LA), et est limitée par le parallèle de latitude (φA – Nv).

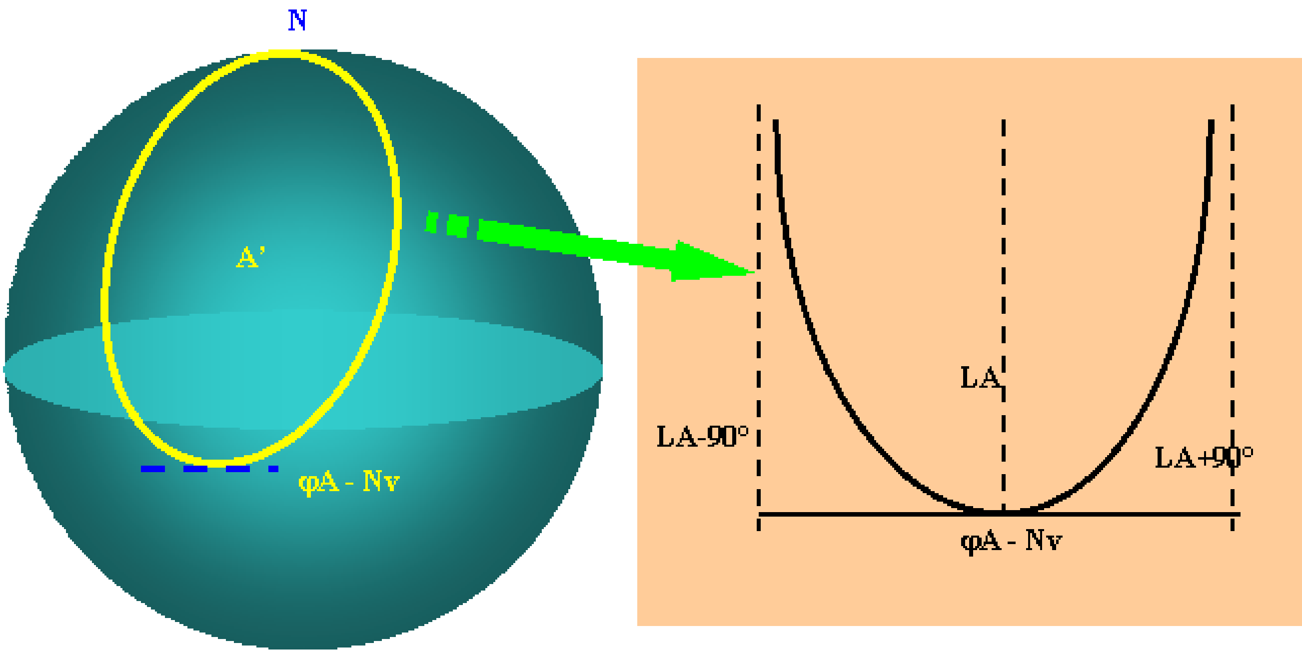


figure 16 : courbe de hauteur de troisième espèce

Tracé de la droite de hauteur (droite de Marcq de Saint-Hilaire)

Au voisinage du point d'observation M un arc de la courbe de hauteur peut être assimilée à un segment de droite, contenant M, appelé « droite de hauteur ».
L'erreur commise par cette approximation peut être quantifiée.
L'intersection de deux droites de hauteur relatives à des hauteurs relevées depuis ce même

point M fournit la position de M : c’est le « ***point astronomique*** ».

Voici comment obtenir une droite de hauteur selon la méthode de **Marcq de Saint-Hilaire** (**figure 17**).

Comme indiqué dans le paragraphe plus haut « position du problème », la droite de hauteur, tangente à la courbe de hauteur au point dit « point déterminatif » D, se construit à l’aide de la hauteur relevée au point d’observation M, Hv, de la hauteur calculée en un point estimé E, He, à l’aide des éphémérides, et du calcul de l’azimut Z (angle que fait avec le méridien de E la droite EA’). La différence i = Hv – He, appelée intercept et l’azimut Z permettent de déterminer sans ambigüité le point déterminatif D. La droite de hauteur est alors la droite perpendiculaire en D à EA’.

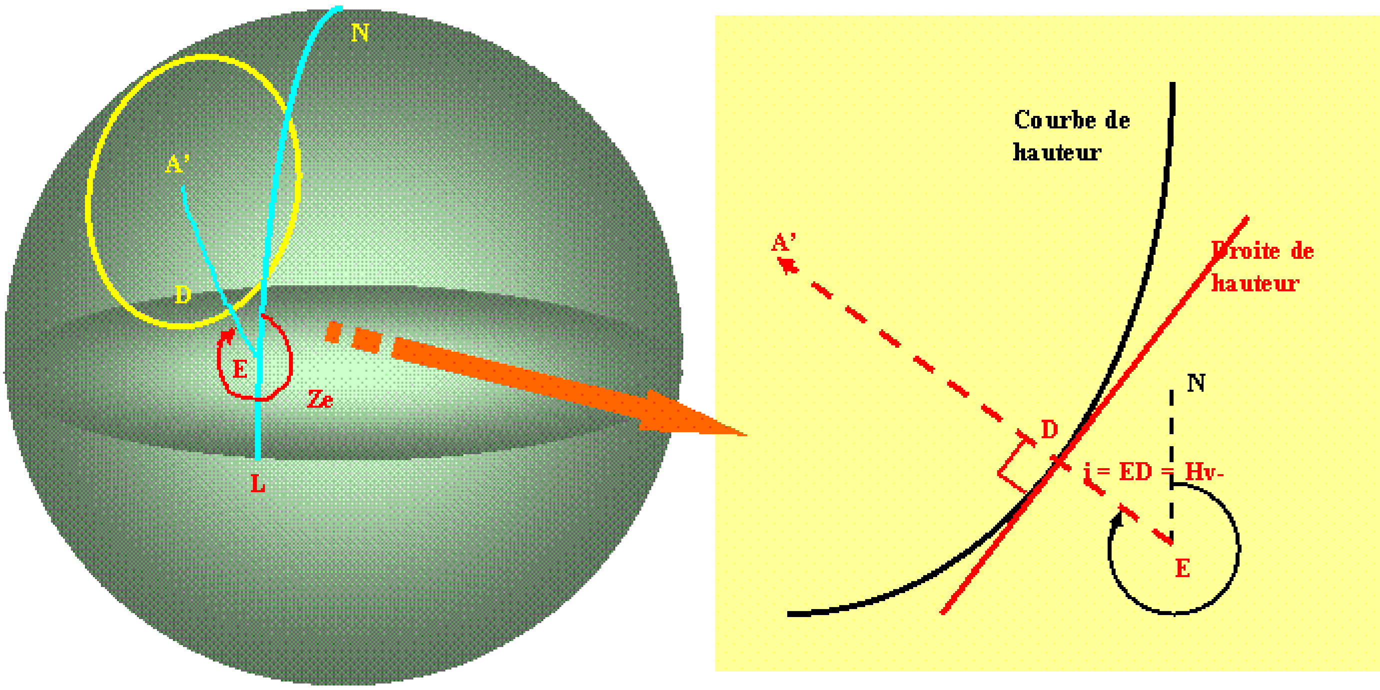


figure 17 : détermination de la droite de hauteur à partir du point d’estime E

Soit E le point estimé à l’heure de l’observation en M de l’astre A. Par définition la hauteur de A en E est la même que celle en M pour cette même heure. A cette même heure la hauteur de A en E est He.
On oriente positivement l’orthodromie EA’ de E vers A’, par conséquent on compte les arcs MA’ = 90° - Hv et EA’ = 90° - He, et l’arc EM vaut : EM = EA’ + A’E.
Sur la surface terrestre la distance angulaire entre le point d’estime E et le point déterminatif D (qui appartient au cercle de hauteur Hv), ou intercept, est :

$$i = ED = EA' + A'D = EA' - DA' = (90° - He) - (90° - Hv) = Hv - He$$

On remarque que l’intercept est aussi égal à i = EM. Il est obtenu en comparant les hauteurs de A mesurées en E et en M à la même heure.

Remarque :
Si i > 0 (Hv > He) : le point estimatif D est situé dans la direction de A’.
Si i < 0 (Hv < He) : D est situé dans la direction opposée.

L’azimut en D de l’astre (angle (N, DA’)) est noté Z’ et est différent de Z, azimut en E. Mais comme E et D sont supposés proches on peut confondre les valeurs de ces deux azimuts : Z’ ≈

Z.

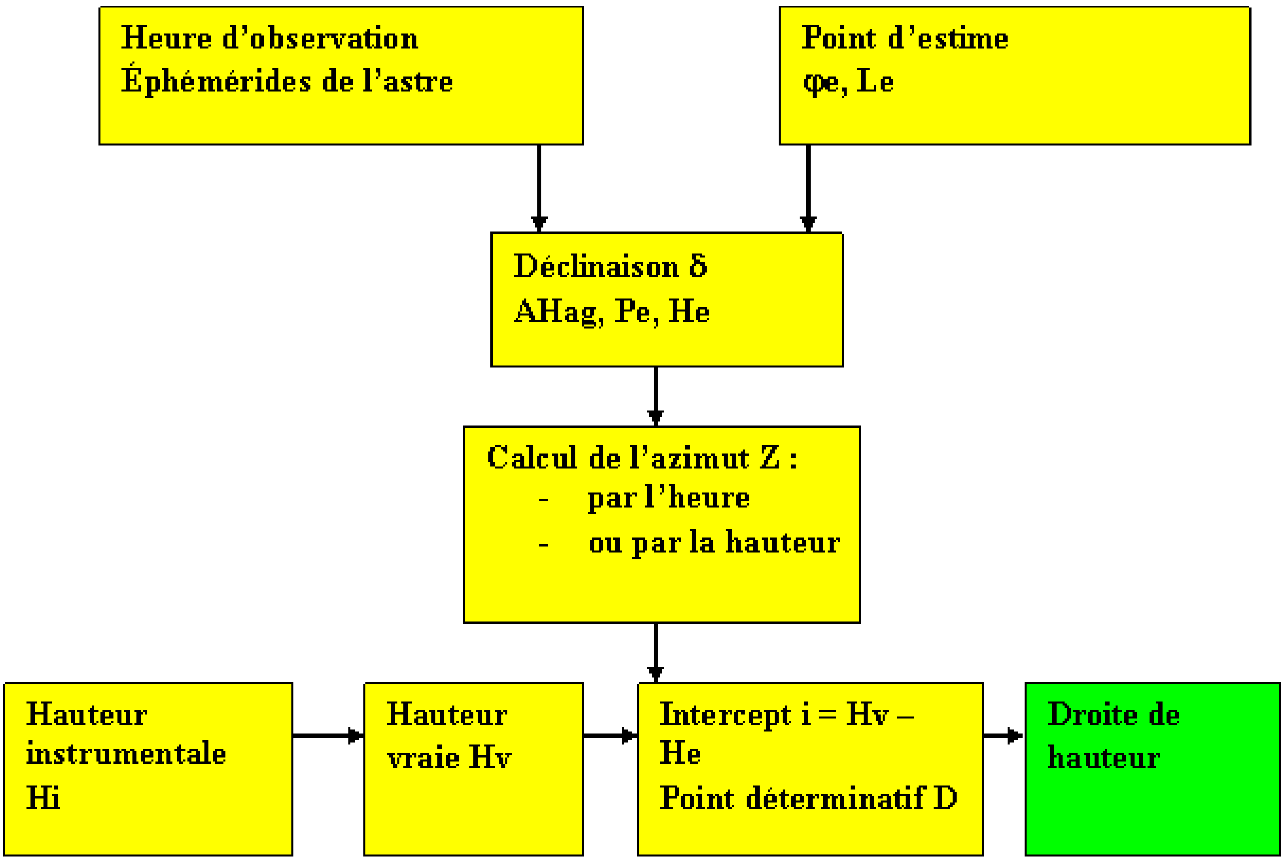
Pour positionner D sur la carte de Mercator il faut tracer la droite EA' sur laquelle il se trouve. Il faut donc, connaissant les coordonnées de E et les éphémérides pour A, calculer l'azimut Z. Une fois connu Z l'orientation de la droite EA' permet de l'incliner comme il faut sur la carte. L'azimut en E se calcule à partir des formules de trigonométrie sphérique (voir article « **cadran solaire** »), par l'une des deux relations suivantes :

$$\tan Z = \frac{\sin Pe}{\cos \varphi e \tan \delta - \sin \varphi e \cos Pe}$$ qui fournit l'azimut par la connaissance de l'heure (via Pe)

$$\cos Z = \frac{\sin \delta - \sin \varphi e \sin He}{\cos \varphi e \cos He}$$ qui fournit l'azimut par la connaissance de la hauteur en E, He

où Pe = AHag – Le, si A est à l'ouest, et Pe = 360° - (AHag – Le).
Le point D est alors positionné sur EA' à une distance de E égale à l'intercept i = Hv – He.
La droite de hauteur est construite en menant la perpendiculaire en D.

En résumé, la droite de hauteur s'obtient suivant le synoptique :



Droite méridienne

Si on relève la hauteur d'un astre au passage au méridien supérieur (PMS), l'azimut est Z = 0 si ce passage a lieu au nord, Z = 180° si ce passage a lieu au sud (dans le cas du soleil, le PMS se fait toujours au sud).
On a aussi AHag = L (l'angle horaire de l'astre au PMS est égal à la longitude du lieu d'observation).

La relation fondamentale :

$$\sin Hv = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos(AHap - L)$$

se simplifie alors en :

$$\cos(90° - Hv) = \cos Nv = \cos(\varphi - \delta)$$

d'où :

$$\varphi = Nv + \delta$$

Cette relation permet de calculer directement la latitude au moment du PMS (dit ***moment de la « méridienne »***) à partir du relevé de la hauteur et de la valeur de la déclinaison donnée par les éphémérides.

Pour les étoiles le PMS correspond toujours à la culmination (l'étoile se trouve à son point le plus haut sur la sphère céleste du lieu d'observation).
Ce n'est pas le cas pour les planètes, pour la Lune et le Soleil. Pour la Lune l'écart entre le PMS et la culmination est très important : 17'. Pour le soleil cet écart est faible : 1',1. Sachant que sur la sphère céleste 1' d'arc représente une durée de 4 secondes, l'écart en temps est de 68 secondes pour la Lune et de 4 secondes environ pour le soleil.

Pour le soleil on peut toujours admettre que le passage au méridien et la culmination peuvent coïncider.

Le point astronomique

La position de l'observateur à un instant donné (ou « point astronomique ») est obtenu par l'intersection de deux ou plusieurs droites de hauteur. Afin d'avoir une précision suffisante il est nécessaire que les droites se coupent sous un angle supérieur ou égal à 30°.

Comme vu en introduction deux méthodes se présentent :

- soit on pratique les droites de hauteur avec un astre unique (en l'occurrence le soleil) mais en des instants différents : « ***observations à long intervalle*** ».
- soit on pratique les droites de hauteur avec plusieurs astres visibles en même temps : « ***point crépusculaire*** ».

observations à long intervalle, transport de droite :

A partir d'une observation du soleil A1 effectuée à l'instant t1 la droite de hauteur (d1) a été tracée : elle passe par le point déterminatif D1 où elle est perpendiculaire à la droite E1A'1 joignant l'estime E1 au point substellaire du soleil A'1 (**figure 18**). L'azimut calculé est Z1 et l'intercept est i1 = Hv1 – He1.
A un autre instant t2, une nouvelle droite de hauteur (d2) est obtenue à partir d'une observation du soleil A2, avec pour point déterminatif D2, estime E2, azimut Z2 et intercept i2.
Pour obtenir la position de M on ne peut pas se contenter de faire l'intersection de (d1) et (d2) car le navire s'est déplacé. Mais on peut déterminer la position du navire M2 à l'instant t2 par la méthode de la droite transportée, à la condition seulement que pendant la durée t2-t1 le navire ait suivi une même route (cap constant) avec une même vitesse V. Pendant cette durée le navire s'est déplacé du point M1 (inconnu) au point M2 (inconnu aussi). Mais le point estimé E1

s'est déplacé en E'1, et le point déterminatif D1 s'est déplacé en D'1, suivant le même cap (z) et sur une distance s :

$$s(\text{milles}) = E1E'1 = D1D'1 = \frac{(\varphi 2 - \varphi 1)}{\cos z} = V(t2 - t1)$$

où les latitudes sont exprimées en minutes d'angle, $\varphi 1$ est la latitude inconnue du navire à t1, $\varphi 2$ celle inconnue aussi à t2. Puisque le cap est conservé la route du navire coupe les méridiens de départ et d'arrivée sous le même angle. On peut donc translater la droite de hauteur (d1) de D1 en D'1, ce qui donnera une droite (d'1) parallèle à (d1) : c'est la droite transportée à l'instant t2, selon une translation suivant la route suivie. On détermine ensuite l'intersection entre (d'1) et la nouvelle droite de hauteur (d2) obtenue à l'instant t2, à condition d'utiliser le même point d'estime pour ces deux droites : E2 = E'1.

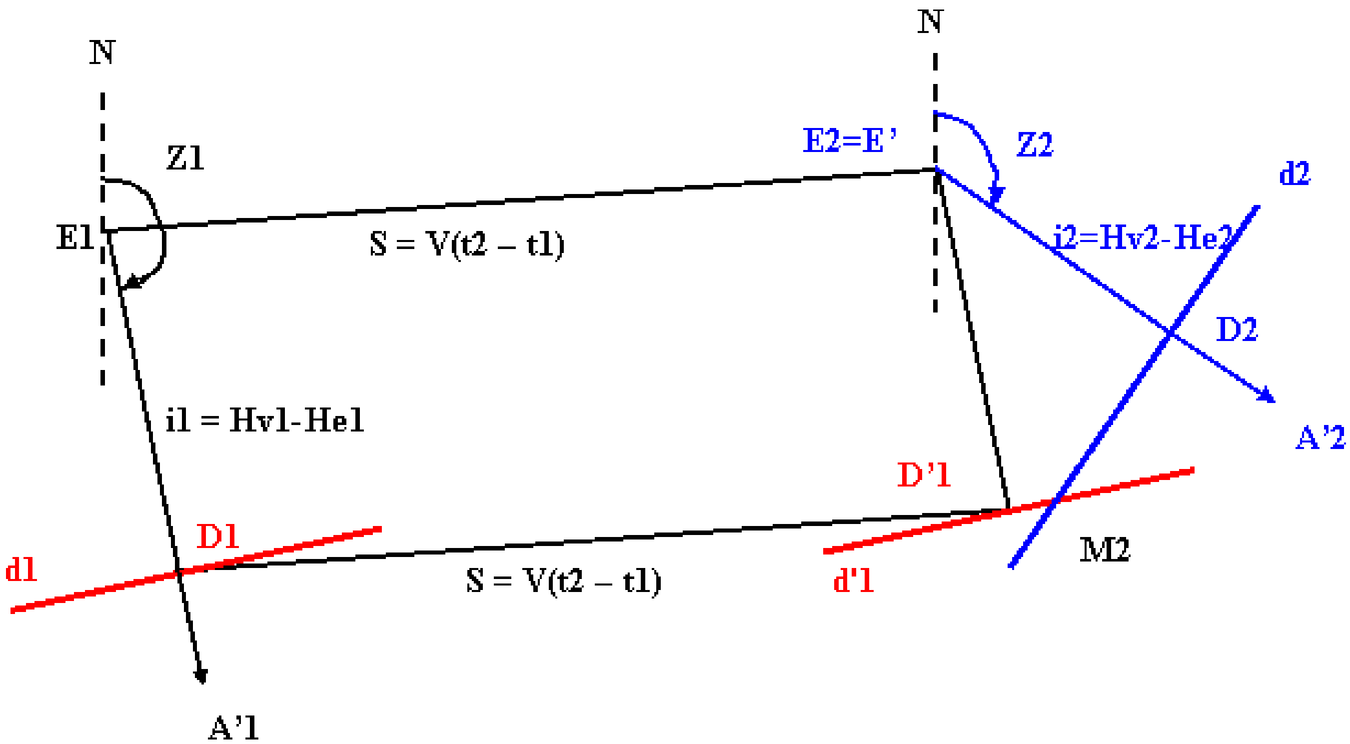


figure 18 : point astronomique à long intervalle et transport de droite

point crépusculaire :

On effectue les observations à trois instants rapprochés t1, t2, t3 (quelques minutes) en trois points M1, M2, M3 très rapprochés (moins de 30 nautiques), de trois astres respectivement A1, A2, A3.
L'un des points estimés, E, sert de point estimé pour les autres observations, les coordonnées des astres sont calculées pour leurs instants respectifs d'observation t1, t2, t3 (figure 19).
L'emploi d'un seul point estimé commun présente l'avantage de se dispenser de déterminer d'autres points estimés et de simplifier les calculs des trois droites de hauteur. Le choix d'un seul point estimé E donne pour les intercepts in = EDn (n = 1, 2, 3) des résultats différents de ceux obtenus avec des points estimés En (i'n = EnDn) mais ne change ni les positions des points déterminatifs Dn, ni les azimuts Zn = (N, Dn).

Pour tenir compte du déplacement du navire entre les différents instants d'observation, afin d'obtenir une intersection pour M3, qui donnera le point astronomique final à l'instant t3, on procède au transport de droites comme dans le cas du point à long intervalle, connaissant le cap et la vitesse du navire.

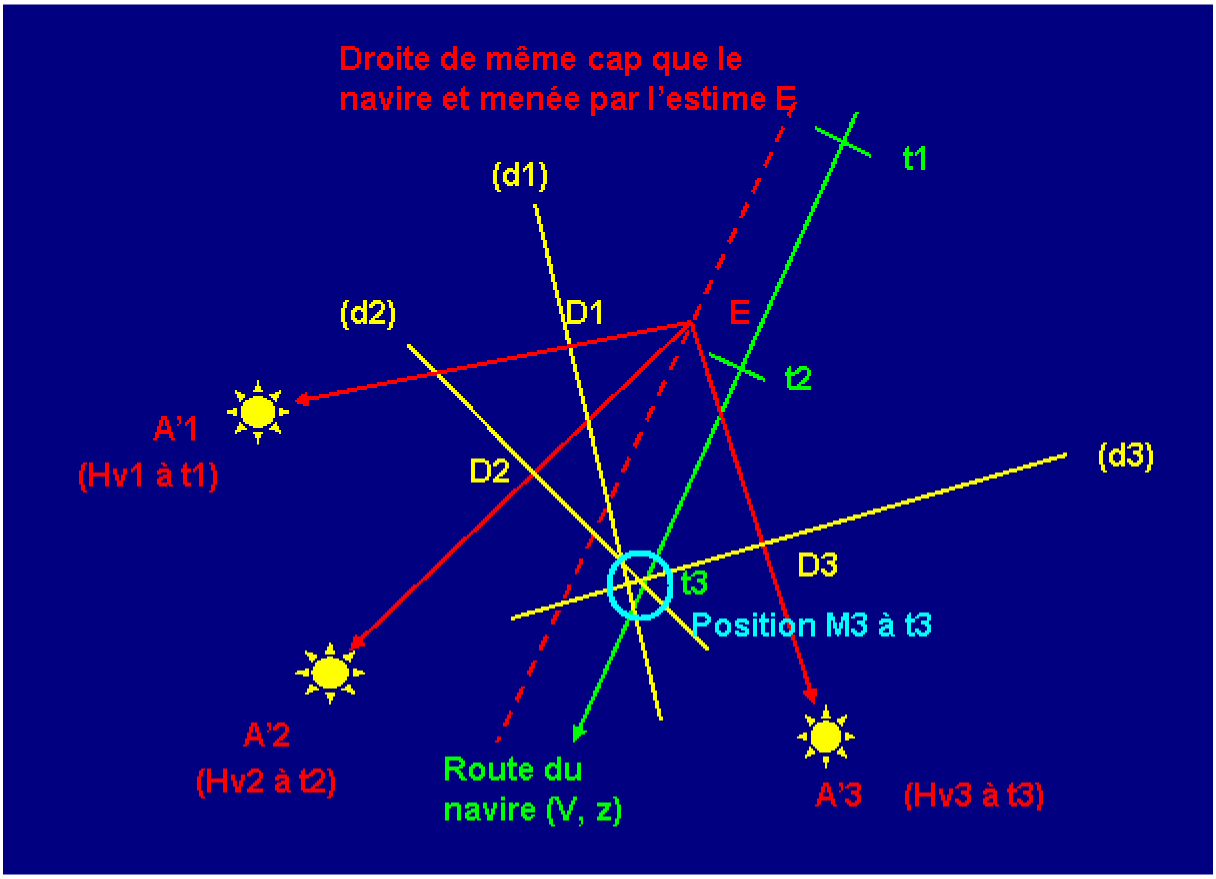


figure 19 : principe du point crépusculaire

Précision du point astronomique par la méthode de la droite de hauteur

Le point astronomique comporte une erreur qui est la somme :

- d'une erreur (ε) inhérente à la méthode de la droite de hauteur : elle provient du fait que l'on a confondu localement la courbe de hauteur avec sa tangente. Elle dépend donc de la courbure de la courbe de hauteur au point considéré.
  On montre que cette erreur se décompose en un terme ($\varepsilon 1$) qui ne dépend que de la hauteur vraie (Hv) et un terme ($\varepsilon 2$) qui dépend de l'azimut et de la latitude :

$$\varepsilon(Hv, Z, \varphi) = \varepsilon 1(Hv) + \varepsilon 2(Z, \varphi)$$

$$\varepsilon 1(Hv) = \frac{m^2}{2 \times 3438} \tan Hv$$

$$\varepsilon 2(Z, \varphi) = -\frac{m^2}{2 \times 3438} \tan \varphi \cos Z$$

  où les erreurs sont exprimées en milles nautiques, *m* = ED est la distance entre le point estimé et le point déterminatif exprimée en milles. Cette erreur est d'autant plus importante que la hauteur vraie Hv est grande, l'azimut Z de l'astre est proche de 0 ou de 180°, et que la latitude est élevée.
- d'une erreur ($\varepsilon 3$) liée à l'orientation de la droite. Elle provient du fait que l'on a assimilé le vertical de l'astre à une loxodromie. On montre que cette erreur dépend de

l'intercept, de la latitude et de l'azimut :

$$\varepsilon 3(i,\varphi,Z) = \frac{m}{3438}(Hv - He)\tan\varphi \sin Z$$

Cette erreur augmente avec la latitude et l'intercept i = Hv – He. Elle est faible pour des azimuts peu écartés du méridien.

- enfin, d'une erreur (ε4) liée à la non sphéricité de la Terre. On montre qu'en assimilant la surface terrestre à une sphère alors qu'elle est un ellipsoïde de révolution, on commet une erreur :

$$\varepsilon 4 = \frac{m}{148}$$

L'erreur totale propre à la méthode est donc la somme des erreurs :

$$\varepsilon = \varepsilon 1 + \varepsilon 2 + \varepsilon 3 + \varepsilon 4$$

Les résultats numériques aboutissent à la conclusion suivante sur la limite de validité de la méthode de Marc de Sain-Hilaire, à savoir :
Tant que la latitude reste inférieure à 60°, au nord comme au sud, et pour des hauteurs vraies inférieures à 80°, l'erreur maximale de la droite de hauteur selon la méthode de Marc de Saint-Hilaire n'excède pas 1 mille si la distance au point déterminatif reste inférieure à 30 milles.

Annexe : erreur de verticalité du sextant

Se reporter à la **figure 9**.

On a : AA' = Hi + ΔH, où Hi est la hauteur instrumentale réelle.
Dans le triangle sphérique APA' on a : tan Hi = tan (Hi + ΔH)cos A.
Comme ΔH et A sont petits, on a les approximations : cos A = 1 – A²/2 et tan (Hi + ΔH) = (tan Hi + tan ΔH)/(1 – ΔH.tan Hi)
D'où :
ΔH (1 + tan² Hi) = A² (tan Hi + ΔH)/2
En négligeant ΔH devant tan Hi, il vient : ΔH = A² tan Hi / [2 (1 + tan² Hi)] = A² sin 2Hi / 2
Soit en minutes d'arc :

$$\Delta H = \frac{A^2}{4} \times 3438 \sin 2Hi$$

BIBLIOGRAPHIE

- *cours de navigation de l'Ecole Navale*, Marine Nationale, Brest, 1980
- M. Caillou, D. Laurent, F. Percier : *traité de navigation*, bibliothèque de l'institut français d'aide à la formation professionnelle maritime, éd. Masson, 1989